

## ACCURACY OF COORDINATES FOR DETERMINING THE SHIP'S POSITION, CALCULATED BY THE LEAST SQUARES METHOD, IN CASE OF REDUNDANT MEASUREMENTS

### ТОЧНІСТЬ КООРДИНАТ ВИЗНАЧЕННЯ МІСЦЯ СУДНА, РОЗРАХОВАНИХ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ, ПРИ НАЯВНОСТІ НАДЛИШКОВИХ ЛІНІЙ ПОЛОЖЕННЯ

I. A. Burmaka, D.Sc., professor, B. M. Aliksieichuk, senior lecturer

I. O. Бурмака, д.т.н., професор, Б. М. Алексєйчук, ст. викладач

National University "Odessa Maritime Academy", Ukraine

Національний університет "Одеська Морська Академія", Україна

#### ABSTRACT

*This article discusses the accuracy of the vessel's position coordinates, calculated using the least squares method, in the presence of redundant line positions (LP) over time, assuming the LP error is normally distributed. It is stated that for a normal error distribution, the least squares method is the maximum likelihood method, thus the norm of the positional error covariance matrix is minimized, ensuring the highest accuracy of the vessel's position coordinates. Field observation results are presented, where experimental data were obtained, demonstrating the possibility of altering navigational parameters. Following the adjustment of navigational parameters, a series of tests were conducted, exceeding 100 in total. The analysis of these results indicates that deviations in navigational parameterization, achieved over a limited time interval, conform to the normal law of variability distribution. Adjustments to the parameters over a larger interval are subject to changes in the laws of change, with the degree of power of some of the normal law proportional to the interval of the series value of the navigational parameter. It is demonstrated that the efficiency of observing the vessel's coordinates, calculated by the least squares method during times of redundant LP, the errors of which can be calculated according to different laws, is less than one. To evaluate the efficiency of coordinate observation derived from overly large LP and gaps using the least squares method, a computer simulation was performed. During this simulation, efficiency values were compared with the highest theoretically achievable efficiency values, as outlined in the article, and the difference between them in the case of high-technological parameters was less than 22.0%. The simulations conducted showed good agreement between the efficiency assessments derived from analytical expressions and those obtained from the simulations, thereby confirming the validity of the analytical method for evaluating the efficiency of observed coordinates, calculated by the least squares method.*

**Keywords:** navigational safety, accuracy of coordinates assignment, change of law and subdivision, simulation modelling.

#### Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими або практичними завданнями

Задля забезпечення навігаційної безпеки необхідний безперервний контроль місця судна з необхідною точністю обсервації, для чого використовуються надлишкові лінії положення (ЛП), причому розрахунок обсервованих координат проводиться методом найменших квадратів.

Натурні спостереження показали, що випадкові похибки навігаційних вимірів найчастіше розподілені за змішаними законами двох типів. У разі якщо розрахунок обсервованих координат за наявності надлишкових вимірів проводиться методом найменших

квадратів, відбувається втрата їх точності. Тому реальна точність визначення координат буде меншою за передбачувану задану, отже, необхідно дослідження залежності точності координат визначення місця від суттєвих факторів з метою подальшої розробки способу забезпечення заданої точності контролю місця судна, що є актуальним при використанні ЕКНІС для визначення місця судна по дистанціям або пеленгам. Також це актуально в районах поганого проходження сигналу супутникових систем, які використовують альтернативні системи контролю місця судна, і при застосуванні систем кореляційної навігації в прибережних і внутрішніх водах.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і виділення невирішених раніше частин загальної проблеми**

Багато робіт з тематики безпеки мореплавання присвячені питанням підвищення точності судноводіння. Ряд робіт [1-5] розглядають аспект підвищення точності судноводіння апаратними засобами.

У роботі [1] наголошується, що краудсорсингова батиметрія (CSB) щодо нової концепції збору батиметричних даних. CSB можна визначити як збирання та спільне використання даних про глибину (і метаданих), виміряних та зібраних нетрадиційними дослідницькими суднами, оснащеними навігаційними приладами, при збереженні їх звичайних операцій у морі. Міжнародна гідрографічна організація (МОО) розробила Посібник із CSB. Цей документ забезпечує основу для збору, обробки даних та інформації про невизначеність даних. ІНО також розробила модель у рамках концепції CSB для стандартизації даних CSB. Дані, зібрані за допомогою CSB можуть стати цінним доповненням до існуючих даних, зібраних за допомогою гідрографічних досліджень.

Незважаючи на це, необхідно підкреслити, що дані ЦСУ не можуть бути використані як офіційні дані. Збір даних БГС також пов'язані з потенційними юридичними проблемами у зв'язку з характером промірного проходу в територіальних та внутрішніх водах прибережних держав. У цьому документі підкреслюються відмінності між гідрографічною зйомкою та CSB. Аналізуються переваги та недоліки з погляду їхнього потенційного впливу на безпеку судноплавства. Через обмеження моделі збору даних CSB рекомендується розробити модель збору батиметричних даних на національному рівні.

У роботі [2] представлена модель оцінки ризику ймовірності невідповідності точності позиціонування глобальної супутникової навігаційної системи (GNSS) вимогам конкретного додатку на основі GNSS. Пропонована процедура розробки моделі вимагає великого набору спостережень помилок оцінки розташування, які повинні охоплювати ряд класів збурень позиціонування середовища (космічна погода, тропосфера, багатопротеневе поширення і т. д.), що впливають на точність позиціонування GNSS. В результаті модель стає інструментом, який повертає ймовірність відмови при дотриманні вимог до точності позиціонування даних додатків GNSS, тим самим надаючи вхідні дані для оцінки ризику розгортання GNSS. Пропонована модель та процедура її розробки демонструються у разі умов позиціонування у полярному регіоні, при цьому для розробки згаданої моделі використовуються необроблені спостереження псевдодальності GNSS, отримані на опорній станції мережі Міжнародної служби GNSS (IGS) Iqualuit, Канада.

Метою статті [3] було опис випадкової фази сигналу E6 супутникової навігаційної системи Galileo. На основі наявної інформації було створено математичні моделі вимірювальних сигналів системи Галілео. Визначено частоти окремих сигналів та візуалізовано їх структуру. Також показано блок-схему генерації окремих сигналів. Основним внеском статті є створення випадкової фазової моделі E6 сигналу від системи Galileo. Відповідно до технічних даних системи Galileo було визначено параметри моделі випадкових фаз. Результати моделювання підтвердили, що нестабільність частоти безперервного сигналу E6, що приймається з супутника, є стаціонарним процесом. Короткочасна стабільність частоти коливається від 10-13 до 10-14. Результати моделювання підтвердили, що ефект Доплера істотно впливає випадкову фазу сигналу E6. Це може вплинути на результати навігаційних вимірювань за сигналом E6.

Представлені у статті результати моделювання та симуляції випадкової фази сигналу E6 можуть бути використані для оцінки стійкості навігаційної системи Galileo до перешкод.

У статті [4] представлений аналіз сигналу Galileo E1 та його чутливості до різних типів перешкод. Дослідження включало моделювання білого шуму, хаотичних імпульсних перешкод і вузькосмугових перешкод, а також вплив цих сигналів, що заважають, на сигнал E1. На підставі наявної інформації були створені спектральні структури для зазначених типів перешкод, а надалі ці перешкоди були інтегровані сигнал E1 в програмному середовищі Matlab.

Фільтр Калмана використовувався для фільтрації білого шуму з адитивної суміші сигналу E1 та білого шуму. Дослідження було спрямоване на аналіз впливу білого шуму, хаотичних імпульсних перешкод та вузькосмугових перешкод на спектральну густину потужності сигналу E1. Результати цієї роботи можуть бути використані при розробці надійних приймачів та сигнальних структур, здатних протистояти цим типам перешкод.

У роботі [5] описується створення моделі руху літального об'єкта в геоцентричній системі координат (ECEF – Earth-Centered, Earth-Fixed). Така модель може бути використана для дослідження точності та завадостійкості радіонавігаційних систем. Суть побудови моделі полягає у математичному описі руху літального об'єкта у геоцентричній системі координат.

Траєкторія польоту літаючого об'єкта складається з однієї прямолінійної ділянки та двох поворотів. При створенні моделі передбачався політ постійної висоти. У цій роботі представлено одну з можливих процедур моделювання руху літального об'єкта в геоцентричній системі координат. Початкові координати об'єкта, що літає, вибиралися за даними Flightradar 24. Для комп'ютерного моделювання використовувалася програма Matlab.

У розглянутих роботах виявлено суттєві фактори, що впливають на точність та завадостійкість радіонавігаційних систем, створено математичні моделі впливу суттєвих факторів на параметри систем. Це підвищує якість радіонавігаційних систем, що впливає на точність позиціонування об'єктів-споживачів.

Аналіз статистичних матеріалів точності визначення місця судна за допомогою приймача супутникової радіонавігаційної системи зроблено в роботі [6], з якого випливає, що припущення про розподіл випадкових похибок вимірювання широти та довготи за нормальним законом не є коректним і вимагає використання інших законів розподілу.

У роботах [7,8], представлений аналіз статистичних даних похибок навігаційних вимірювань, отриманих у натурних спостереженнях, який показав, що розподіл похибок навігаційних вимірювань відрізняється від нормального закону. У роботах не показано, у чому суттєва відмінність розподілу похибок від нормального закону для оцінки обсервованих координат судна. У роботі [9] запропоновано змішані закони двох типів для опису випадкових похибок навігаційних вимірювань, а в роботі [10] наведено результати перевірки статичних гіпотез законів розподілу похибок навігаційних вимірювань, з якої випливає, що похибки вимірювань радіолокаційних відстаней та пеленгів в основному підпорядковуються змішаним законам першого та другого типу. Однак у роботі не вказується, як ця обставина впливає на точність контролю місця судна. Дослідження можливості опису систем залежних випадкових величин за допомогою узагальненого розподілу Пуассона з базовим нормальним розподілом розглянуто у роботах [11,12].

Застосування ортогонального розкладання щільності розподілу похибок навігаційних вимірів визначення місця судна при надмірних вимірах розглянуто в роботі [13]. Застосування методу найменших квадратів для розрахунку значень обсервованих координат судна, як зазначається у роботі [14], не дозволяє отримати їх ефективні оцінки, якщо закон розподілу похибок відрізняється від закону Гауса. У роботі [15] проведений аналіз ефективності обсервованих координат судна за наявності надлишкових ліній положення та показано, що при змішаних законах розподілу ефективність менша за одиницю, і зі зростанням суттєвого параметра вона прагне за величиною до одиниці. Але в цих роботах не показано шляхів підвищення ефективності обсервованих координат судна.

У цілому, як впливає з розглянутих робіт, випадкові похибки навігаційних вимірів найчастіше розподілені по змішаним законам двох типів, що підтверджується натурними

спостереженнями. Показано, що ефективність обсервованих координат при надмірних вимірах, розрахованих методом найменших квадратів, часто менше одиниці.

### Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Ціль роботи полягає в дослідженні точності координат визначення місця судна, розрахованих методом найменших квадратів, при наявності надлишкових ліній положення і визначення чинників, які впливають на точність.

### Виклад матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів

Розглянемо точність координат визначення місця судна, розрахованих методом найменших квадратів, при наявності надлишкових ліній положення в разі, коли похибки ЛП мають нормальний розподіл. Точність координат визначення місця судна будемо характеризувати дисперсією  $D_R$  модуля випадкового вектора позиційної похибки, який є відстанню між істинним і обсервованим місцем судна.

Як показано в роботі [11], дисперсія  $D_R$  являється сумою діагональних елементів коваріаційної матриці позиційної похибки і визначається наступним виразом:

$$D_R = \frac{\sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i + \sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i \right)}{\left[ \left( \sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right)^2 \right]}, \quad (1)$$

де  $\sigma^2$  - дисперсія похибки лінії положення;  $\alpha_i$  - кут між градієнтом і віссю у вибраній системі координат;  $n$  - число ЛП.

Аналіз одержаного виразу показує, що дисперсія модуля векторіальної похибки  $D_R$  залежить від дисперсії похибки лінії положення, орієнтації ліній положення  $\alpha_i$  і їх числа  $n$ . З формули очевидно, що за інших рівних умов дисперсія  $D_R$  лінійно залежить від дисперсії похибки лінії положення  $\sigma^2$ .

$$\text{Якщо позначимо } k = \frac{\left( \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i + \sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i \right)}{\left[ \left( \sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right)^2 \right]},$$

то вираз (1) має вигляд:

$$D_R = k \sigma^2.$$

В табл. 1 показана залежність значень коефіцієнта  $k$  від числа  $n$  ЛП з урахуванням того, що значення кутів  $\alpha_i$  вибрані найкращим чином.

Таблиця 1. Залежність коефіцієнта  $k$  від числа ліній положення  $n$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	2	1,3	1	0,83	0,7	0,58	0,52	0,45	0,4

Таким чином, в разі, коли похибки ЛП мають нормальний розподіл, точність координат визначення місця судна, розрахованих методом найменших квадратів, при наявності надлишкових ліній положення залежить лише від дисперсій ЛП, їх числа та взаємного розташування.

Так як для нормального розподілу похибок метод найменших квадратів являється методом максимальної правдоподібності, то норма коваріаційної матриці позиційної похибки являється мінімальною, тобто досягається найвища точність координат визначення місця судна.

Однак в останні десятиріччя з'явилися публікації [6,7,8], в яких наголошується, що припущення про розподіл випадкових похибок навігаційних вимірювань за нормальним законом не є коректним і вимагає використання інших законів розподілу. Тому були проведені натурні спостереження, в яких були одержані експериментальні дані відносно похибок вимірювання навігаційних параметрів.

Для формування початкових вибірок похибок вимірювання навігаційних параметрів проводились серії вимірювання навігаційних параметрів кількістю більше 100 вимірювань. Вимірювання навігаційних параметрів здійснювалися на стоянці судна, причому за допомогою РЛС вимірювалися дистанція і пеленг на нерухомий орієнтир, а за допомогою приймача супутникової навігаційної системи GPS фіксувалися широта і довгота судна.

Вимірювання виконувалися в трьох портах: Мормугао (Індія), Річардс Бей (ПАР) і Дакар (Сенегал). Інтервал часу проведення всіх вимірювань планувався так, щоб в порту Мормугао він був якнайменшим (близько 8 годин, 150 вимірювань), в порту Річардс Бей вимірювання проводилися протягом доби (210 вимірювань), а в порту Дакар - протягом двох діб (250 вимірювань). Різна тривалість і число вимірювань планувалося для виявлення впливу чинника часу на похибки вимірювань.

Стандартною процедурою розраховувалися дисперсія і середнє квадратичне відхилення похибки кожної вибірки. Основні характеристики кожної з вибірок приведені в табл. 2.

Таблиця 2. Характеристики вибірок

Порт	Навігацiон. параметр	Число вимір.	Середнє значен.	Дисперсія D	с. к. в. $\sigma$
Мормугао	пеленг	150	350,63°	0,173	0,415° = 24,9'
Мормугао	дистанція	150	0.1526 миль	5,85	2,42 м
Мормугао	широта	150	15°24',1865 N	33,84	5,82 м
Мормугао	довгота	150	73°48',4980 E	40,46	6,36 м
Річардс Бей	пеленг	210	217,41°	0,222	0,47° = 28,3'
Річардс Бей	дистанція	210	0.3378 миль	19,7	4,44 м
Річардс Бей	широта	210	28°49',1005 S	47,13	6,87 м
Річардс Бей	довгота	210	32°02',8950 E	44,4	6,67 м
Дакар	пеленг	250	122,21°	0,246	0,496° = 29,76'
Дакар	дистанція	250	0.1206 миль	5,68	2,38 м
Дакар	широта	250	14°41',0030 N	38,11	6,17 м
Дакар	довгота	250	17°25',4313 W	39,84	6,31 м

Надалі по кожній вибірці будується гістограма і проводиться перевірка статистичних гіпотез, в процесі якої визначається ступінь згоди статистичного матеріалу вибірки з вибраними законами розподілу вірогідності похибок.

Як альтернативні закони в даній роботі вибраний нормальний закон і змішані закони першого і другого типу. Підсумкові результати натурних спостережень приведені в табл. 3.

Аналіз підсумкової таблиці показує, що похибки вимірювання навігаційних параметрів (пеленга і дистанції), одержані на обмеженому інтервалі часу (8 годин), підкоряються нормальному закону розподілу вірогідності.

Похибки визначення широти і довготи на тому ж інтервалі часу розподілені по змішаних законах обох типів. Похибки вимірювання пеленга і дистанції, не кажучи про похибки широти

і довготи, на більшому інтервалі часу (доба і більш) підлеглі змішаним законам розподілу, ступінь відмінності яких від нормального закону пропорційний інтервалу часу вимірювання серії значень навігаційного параметру.

Таблиця 3. Підсумкові результати натурних спостережень

№ вибірки	Навігац. параметр	Кільк. членів	Закон розпод.	$\chi^2$	Період спостер.
1	пеленг	150	Гауса	0,0065	8 годин
2	дистанція	150	Гауса	0,006	8 годин
3	широта	150	1-го типу n=3	0,0131	8 годин
4	довгота	150	2-го типу n=1	0,015	8 годин
5	пеленг	210	1-го типу n=2	0,011	1 доба
6	дистанція	210	2-го типу n=2	0,010	1 доба
7	широта	210	1-го типу n=6	0,0094	1 доба
8	довгота	210	1-го типу n=1	0,013	1 доба
9	пеленг	250	2-го типу n=3	0,0088	2 доби
10	дистанція	250	1-го типу n=4	0,0088	2 доби
11	широта	250	1-го типу n=1	0,010	2 доби
12	довгота	250	2-го типу n=1	0,009	2 доби

Таким чином, експериментально було встановлено, що похибки вимірювання навігаційних параметрів часто розподілені по законам, які відрізняються від нормального закону. В такому випадку при розрахунку значень обсервованих координат судна методом найменших квадратів в разі надлишкових ЛП ефективність координат менша одиниці.

Ефективність обсервованих координат судна в контексті проблеми, що розглядається, має статистичну інтерпретацію, тобто згідно [8] дорівнює відношенню норми мінімально можливої коварійної матриці  $K_{\min}(x, y)$  обсервованих координат до норми їх коваріаційної матриці  $K_{\text{pos}}(x, y)$ , яка забезпечується застосуванням методом розрахунку координат.

Ефективність  $e$  оцінки обсервованих координат судна визначається виразом [8]:

$$e = \frac{q^2}{ps}$$

де  $p$ ,  $s$  і  $q$  – невластні інтеграли, які від щільностей дійсного і передбачуваного розподілу.

Припустимо, що дійсне розподіл похибок виміру навігаційного параметра описується щільністю  $f(x)$ , а щільністю передбачуваного закону розподілу, яким проводиться розрахунок обсервованих координат, є  $\varphi(x)$ . Для отримання оцінки ефективності необхідно знайти невластні інтеграли  $q$ ,  $p$  і  $s$ , використовуючи вирази [8]:

$$q = \int_{R1} f(x) \left\{ \frac{[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x)]\varphi(x) - [\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x)]^2}{\varphi^2(x)} \right\} dx,$$

$$p = \int_{R1} f(x) \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} \right]^2 \right\} dx \quad i$$

$$s = \int_{R1} \frac{[\frac{\partial}{\partial x} f(x)]^2}{f(x)} dx.$$

Як раніше зазначалося, похибки навігаційних вимірів часто мають змішаний тип розподілу, який підпорядковується змішаному закону першого чи другого типу [1]. Припустимо, що похибка ЛП підпорядковується змішаному закону розподілу першого типу, щільність якого, як показано в роботі [1], виражається так:

$$f(\xi) = \frac{A_m}{(\xi^2 / 2 + \lambda)^{m+1}},$$

де  $A_m$  - нормуючий множник, причому  $A_m = \frac{2^{2m} (m!)^2}{\sqrt{2\pi} (2m)!} \lambda^{m+1/2}$ ;  $m$  - суттєвий параметр,

який набуває цілих чисел;  $\lambda$  - масштабний параметр.

У роботі [6] показано, що ефективність оцінки обсервованих координат  $e$ , розрахованих методом найменших квадратів у разі, коли випадкові похибки навігаційних вимірювань розподілені за змішаним законом першого типу менше одиниці, а її значення в залежності від суттєвого параметра  $m$  розраховуються за формулою:

$$e = 1 - \frac{3}{2m^2 + 3m + 1}. \quad (2)$$

Значення ефективності  $e$ , розраховані за допомогою виразу (2), наведені в табл. 4.

Таблиця 4. Ефективність змішаного розподілу першого типу

m	1	2	3	4	5	6
e	0,5	0,8	0,893	0,934	0,955	0,968

Відповідно до наведеної таблиці зі зростанням  $m$  змішаний розподіл наближається до нормального, а ефективність  $e$  – до одиниці.

Тепер розглянемо випадок, коли похибка ЛП підпорядковується змішаному закону розподілу другого типу, щільність якого, як показано у роботі [1], має такий вигляд:

$$f(\xi) = \frac{A_m}{(\xi^2 / 2 + \lambda)^{m+3/2}},$$

де  $A_m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2m+1) \lambda^{m+1}}{\sqrt{2} 2^{m+1} m!} = \frac{(2m+1)! \lambda^{m+1}}{\sqrt{2} 2^{2m+1} (m!)^2}$ .

Як показано в роботі [6], ефективність  $e$  оцінки обсервованих координат, які розраховані методом найменших квадратів для випадку розподілу випадкових похибок навігаційних вимірювань за змішаним законом другого типу, також менше одиниці. Вона в залежності від суттєвого параметра  $m$  розраховується за допомогою виразу:

$$e = 1 - \frac{3}{2m^2 + 5m + 3}, \quad (3)$$

причому ефективність  $e$ , розрахована за допомогою виразу (3), як функція параметра  $m$  наведена в табл. 5. Як і в попередньому випадку, зі зростанням суттєвого параметра  $m$  ефективність  $e$  наближається до одиниці, а змішаний розподіл - до нормального.

Таблиця 5. Ефективність змішаного розподілу другого типу

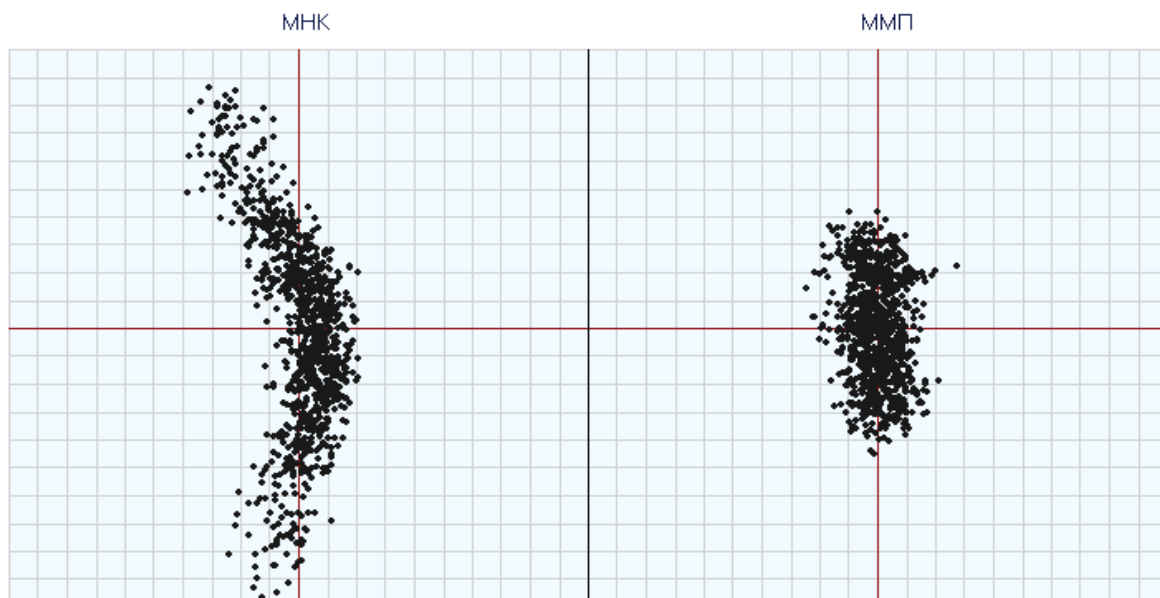
$m$	1	2	3	4	5
$e$	0,7	0,857	0,917	0,945	0,962

Для оцінки ефективності обсервованих координат, отриманих при надлишкових ЛП і розрахованих методом найменших квадратів проводилося імітаційне комп'ютерне моделювання. Причому розглядалися випадки, коли похибки ліній положення підпорядковувалися нормальному закону, а також змішаним законам першого і другого типу.

Імітаційне моделювання проводилося за наступним чином. Спочатку за обраним законом розподілу генерувалася вибірка похибок ЛП, що складається з 1000 членів. Розрахунок координат кожної обсервованої точки проводився по 8 лініях положення,

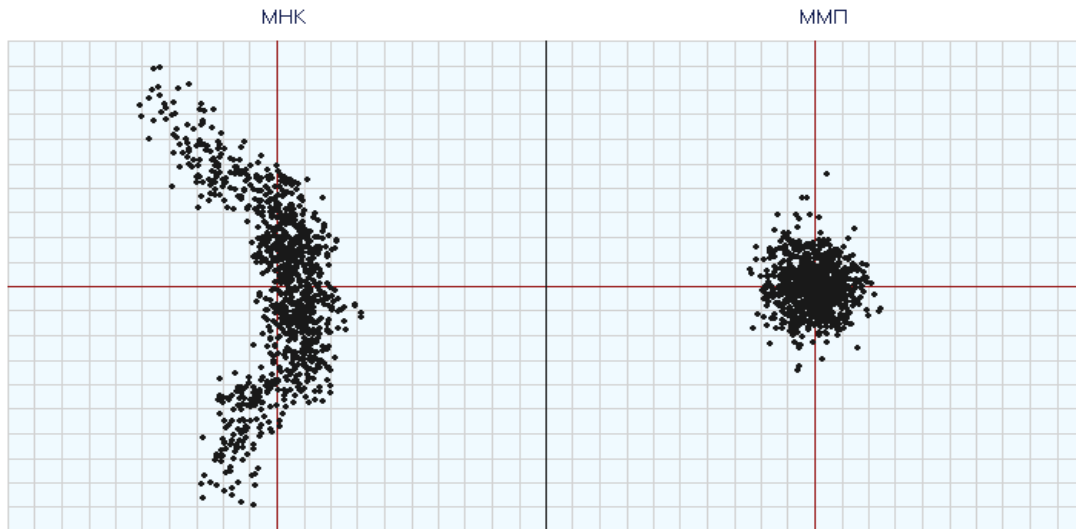
причому елементи ЛП (переноси  $\Gamma_i$  і напрямки градієнтів  $\alpha_i$ ) задавалися відносно істинного місця судна. Використовуючи згенеровану вибірку, можна отримати 125 обсервованих точок, прирощення координат  $X$  і  $Y$  яких є проєкціями векторіальної похибки, що дозволяє розрахувати коваріаційну матрицю векторіальної похибки обсервації. Формування 125 обсервованих точок повторювалося чотири рази, а їх отримані координати зберігалися, в результаті чого накопичувалася вибірка  $S_{500}$  координат векторіальної похибки чисельністю 500 значень похибки. За допомогою отриманої вибірки розраховувалися математичні сподівання  $M_X$ ,  $M_Y$  і дисперсії  $D_X$ ,  $D_Y$  проєкцій  $X$  і  $Y$  векторіальної похибки. Імітаційною комп'ютерною програмою передбачено графічне відображення положень обсервованих точок відносно математичного сподівання, що дозволяє зробити візуальну оцінку їх розсіювання.

На рис. 1-5 показані положення обсервованих точок відносно математичного сподівання, причому максимальні значення координат розсіювання дорівнюють середньому квадратичному відхиленню (прийнятому при моделюванні значенню 5). Із приведених рисунків видно, що розсіяння обсервованих точок менше при використанні методу максимальної правдоподібності (права частина рисунку), ніж при розрахунку методом найменших квадратів.

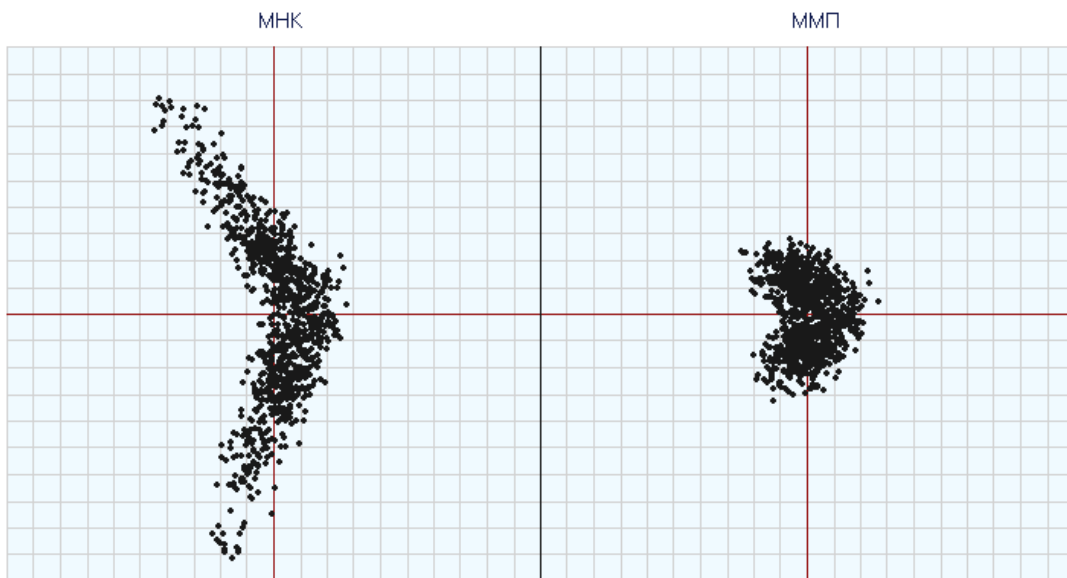




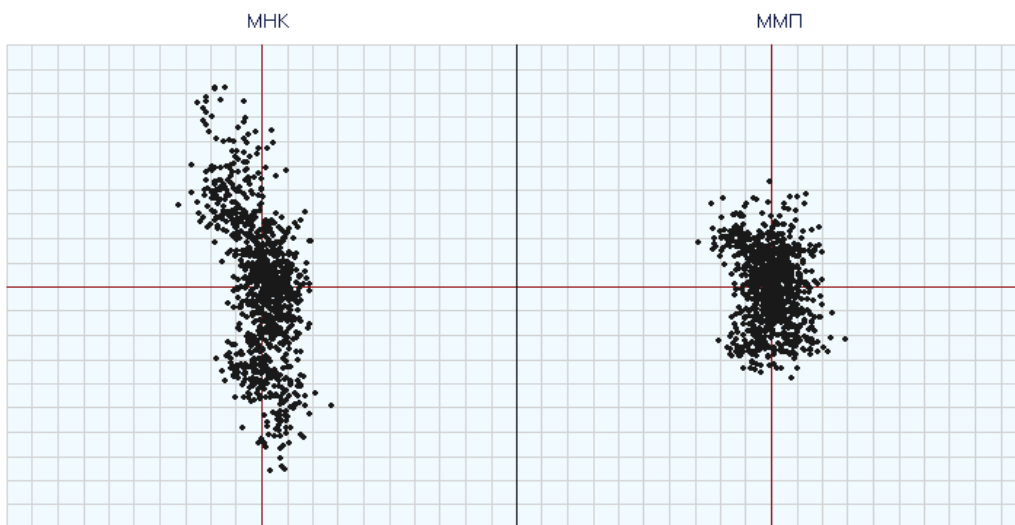
*Рис. 1. Порівняльна характеристика розсіювання точок при  $t=2$*



*Рис. 2. Порівняльна характеристика розсіювання точок при  $t=3$*



*Рис. 3. Порівняльна характеристика розсіювання точок при  $t=4$*



*Рис. 4. Порівняльна характеристика розсіювання точок при  $t=5$*

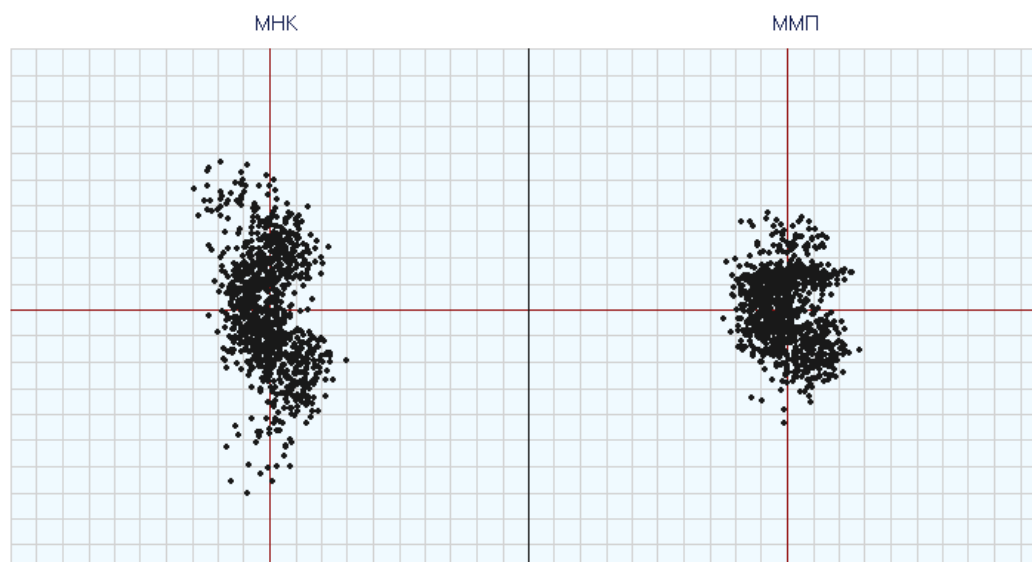


Рис. 5. Порівняльна характеристика розсіювання точок при  $t=6$

Значення ефективності  $e_{IM}$  порівнюються з відповідними значеннями ефективності  $e_T$ , розрахованими теоретично за аналітичними виразами, отриманими в роботі, і розбіжність між ефективностями  $e_T^{(2)}$  і  $e_{IM}^{(2)}$  у відсотковому відношенні становила менше ніж 22,0%. Проведене імітаційне моделювання показало хорошу збіжність оцінок ефективностей, розрахованих за аналітичними виразами і отриманих імітаційним моделюванням, що підтверджує коректність аналітичного методу оцінки ефективності обсервованих координат, розрахованих методом найменших квадратів.

### Висновки і перспектива подальшої роботи по даному напрямку

1. В разі, коли похибки ЛПП мають нормальний розподіл, точність координат визначення місця судна, розрахованих методом найменших квадратів, при наявності надлишкових ліній положення залежить лише від дисперсій ЛПП, їх числа та взаємного розташування.

2. Експериментальні дані натурних спостережень показали, що похибки вимірювання навігаційних параметрів підлягають змішаним законам розподілу першого і другого типу.

3. Показано, що ефективність обсервованих координат судна, розрахованих методом найменших квадратів в разі надлишкових ЛПП, похибки яких мають розподіл по змішаних законах, менша одиниці. Це підтверджено імітаційним комп'ютерним моделюванням.

Надалі доцільна розробка способу компенсації можливих втрат точності при змішаних законах розподілу похибок ЛПП.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Pavić I. Analysis of Crowdsourced Bathymetry Concept and It's Potential Implications on Safety of Navigation/ Pavić I., Mišković J., Kasum J., Alujević D.// TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, Vol. 14, No. 3, pp. 681-686, 2020.
2. Malić E. A Method and a Model for Risk Assessment of GNSS Utilisation with a Proof-of-Principle Demonstration for Polar GNSS Maritime Applications/ Malić E., Sikirica N., Špoljar D., Filjar R.// TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, Vol. 17, No. 1, pp. 43-50, 2023.
3. Džunda M., Čikovský S., Melniková L.: Model of the Random Phase of Signal E6 of the Galileo Satellite Navigation System/ Džunda M., Čikovský S., Melniková L. // TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, Vol. 17, No. 1, pp. 61-68, 2023.

4. Džunda M. Model of the Signal of the Galileo Satellite Navigation System/ Džunda M., Čikovský S., Melniková L.// TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, Vol. 17, No. 1, pp. 51-59, 2023
5. Džunda M. Model of the Motion of a Navigation Object in a Geocentric Coordinate System / Džunda M.// TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, Vol. 15, No. 4, pp. 791-794, 2021.
6. Monteiro Luis. What is the accuracy of DGPS? / Sardinia Monteiro Luis, Moore Terry, Hill Chris. // J. Navig. 2005. 58, № 2, p. 207-225.
7. Кондрашихин В.Т. Определение места судна / Кондрашихин В.Т. - М.: Транспорт, 1989. - 230с.
8. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation / Hsu D. A. // The Journal of Navigation. – Vol. 32.- № 3. – P. 426 - 429.
9. Астайкин Д.В. Идентификация законов распределения навигационных погрешностей смешанными законами двух типов / Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М. // Автоматизация судовых технических средств: науч.-техн. сб. – 2014. – Вып. 20. Одесса: ОНМА. – С. 3 – 9.
10. Алексейчук Б.М. Идентификация закона распределения погрешностей измерений / Алексейчук Б.М., Пасечнюк С.С. // Судовождение: Сб. научн. трудов./ ОНМА, Вып. 27. – Одесса: «ИздатИнформ», 2016 - С. 10-15.
11. Астайкин Д.В. Оценка точности координат судна при избыточных измерениях/ Астайкин Д.В., Сикирин В.Е., Ворохобин И.И., Алексейчук Б.М. – Saarbrucken, Deutschland/Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 с.
12. Сикирин В.Е. Описание навигационных погрешностей с помощью обобщенного распределения Пуассона/ Сикирин В.Е.// Судовождение: Сб. научн. трудов./ОНМА, Вып. 26. – Одесса: «ИздатИнформ», 2016 - С. 152 – 156.
13. Ворохобин И.И. Определение места судна при избыточных измерениях применением ортогонального разложения плотности распределения погрешностей навигационных измерений / Ворохобин И.И., Астайкин Д. В. // Austria - science, Issue: 11, 2018. - С. 39 - 44.
14. Мудров В.М. Методы обработки измерений/ Мудров В.М., Кушко В.Л. - М.: Советское радио, 1976. -192 с.
15. Бурмака И.А. Оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных измерениях / Бурмака И.А., Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М. // Вестник Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. Санкт-Петербург.– 2016. – выпуск 1 (35). – С. 24 - 29.

## REFERENCES

1. Pavić I. Analysis of Crowdsourced Bathymetry Concept and It's Potential Implications on Safety of Navigation/ Pavić I., Mišković J., Kasum J., Alujević D.// TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, Vol. 14, No. 3, pp. 681-686, 2020.
2. Malić E. A Method and a Model for Risk Assessment of GNSS Utilisation with a Proof-of-Principle Demonstration for Polar GNSS Maritime Applications/ Malić E., Sikirica N., Špoljar D., Filjar R.// TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, Vol. 17, No. 1, pp. 43-50, 2023.

3. Džunda M., Čikovský S., Melniková L.: Model of the Random Phase of Signal E6 of the Galileo Satellite Navigation System/ Džunda M., Čikovský S., Melniková L. // TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, Vol. 17, No. 1, pp. 61-68, 2023.
4. Džunda M. Model of the Signal of the Galileo Satellite Navigation System/ Džunda M., Čikovský S., Melniková L.// TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, Vol. 17, No. 1, pp. 51-59, 2023
5. Džunda M. Model of the Motion of a Navigation Object in a Geocentric Coordinate System / Džunda M.// TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, Vol. 15, No. 4, pp. 791-794, 2021.
6. Monteiro Luis. What is the accuracy of DGPS? / Sardinia Monteiro Luis, Moore Terry, Hill Chris. // J. Navig. 2005. 58, № 2, p. 207-225.
7. Kondrashikhin V.T. Location of ship / Kondrashikhin V.T. - M.: Transport, 1989. – 230s. [in Russian].
8. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation / Hsu D. A. // The Journal of Navigation. – Vol. 32.- № 3. – P. 426 - 429.
9. Astaykin D.V. Authentication of laws of distributing of navigation errors by the mixed laws of two types /Astaykin D.V., Alekseychuk B.M.// Avtomatizatsiya sudovyh tehnicytskikh sredstv: nauch.-tehn. sb. – 2014. – Vyp. 20. Odessa: ONMA. – P. 3 – 9. [in Russian].
10. Alekseychuk B.M. Authentication of law of distributing of errors of measuring / Alekseychuk B.M., Pasechnyuk S.S. // Sudovozhdenie: Sb. nauchn. trudov./ONMA, Vyp. 27. – Odessa: «IzdatInform», 2017 - P. 10 – 14. [in Russian].
11. Astayrin D.V. Estimation of exactness of coordinates of ship at the surplus measuring / Astayrin D.V., Sikirin V.E., Vorokhobin I.I., Alekseychuk B.M. – Saarbrucken, Deutschland/ Germaniya: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 p. [in Russian].
12. Sikirin V.E. Description of navigation errors by the generalized distributing of Puasson / Sikirin V.E.// Sudovozhdenie: Sb. nauchn. trudov./ONMA, Vyp. 26. – Odessa: «IzdatInform», 2016 - P. 152 – 156. [in Russian].
13. Vorokhobin I.I. Location ship at surplus measuring by application of orthogonal decomposition of closeness of distributing of errors of navigation measuring / Vorokhobin I.I., Astaykin D.V. // Austria - science, Issue: 11, 2018. - P. 39 - 44. [in Russian].
14. Mudrov V.M. Methods of treatment of measurings / Mudrov V.M., Kushko V.L. - M.: Sovetskoe radio, 1976. -192 p. [in Russian].
15. Burmaka I.A. Estimation of efficiency of coordinates of ship at the surplus measuring / Burmaka I.A., Astaykin D.V., Alekseychuk B.M. // Vestnik Gosudarstvennogo univtrsiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. Sankt-Peterburg. – 2016. – vypusk 1 (35). – P. 24 - 29. [in Russian].