

УДК 656.61.052

DOI: 10.31653/2306-5761.38.2025.157-172

DETERMINATION OF ADDED MASSES AND MOMENTS FOR THE PLANAR MOTION OF A SHIP

ВИЗНАЧЕННЯ ПРИЄДНАНИХ МАС І МОМЕНТІВ ДЛЯ ПЛОСКОГО РУХУ СУДНА

O.F. Kryvvi , D.Sc., professor, **M.V. Miyusov** , D.Sc., professor,

M.I. Vorokhobin , student

О.Ф. Кривий, д.ф.-м.н., професор, **М.В. Міюсов**, д.т.н., професор,

М.І. Ворохобін, курсант

National university "Odesa maritime academy", Ukraine

Національний університет «Одеська морська академія», Україна

ABSTRACT

The occurrence of added masses and moments is caused by a layer of water moving with the ship during maneuvers, which significantly increases the ship's effective mass and affects inertial forces and moments. This effect appears as an additional term in the kinetic energy of the hull-fluid system, accounting for the water's kinetic energy. The energy is determined by added masses along coordinate axes, cross-coupled added masses, added moments about the axes, and added static moments. For planar motion of a surface ship, four quantities are non-zero: longitudinal and transverse added masses, the added moment about the ship's axis of rotation, and the static moment from displacement of transverse added masses. In mathematical models of ship motion, dimensional values are converted to dimensionless coefficients of added masses and moments. Studies show that, even in deep water, added masses and moments can nearly double inertial force and moment components, making their accurate determination crucial for predicting ship motion. Numerous theoretical and experimental works have developed empirical models for estimation, but significant discrepancies exist among results. This study rigorously assesses the possible range of variation of added masses and moments during ship maneuvers in deep water, analyzes existing models, and proposes an efficient empirical model for their determination.

Keywords: added masses, added moments of the ship hull, ship maneuvers, empirical formulas.

АНОТАЦІЯ

Виникнення приєднаних маси та моментів спричинено наявністю шару води, яка рухається разом із судном при виконанні будь яких маневрів. Наявність цього шару води призводить до значного збільшення маси судна і впливає на значення складових інерційних сил і моментів. Цей вплив обумовлений появою додаткової складової у виразі для кінетичної енергії системи корпус-рідина за рахунок кінетичної енергії рідини, яка визначається приєднаними (додатковими) масами рідини в напрямку осей координат, перехресними приєднаними масами, приєднаними моментами навколо осей координат і приєднаними статичними моментами мас. При плоскому русі симетричного судна не нульовими вважаються чотири із цих величин, а саме: повздовжні і поперечні приєднані маси, приєднаний момент навколо осі обертання судна і статичний момент, викликаний зсувом поперечних приєднаних мас навколо осі обертання судна. При побудові математичних моделей руху судна переходять до безрозмірних величин, які називають коефіцієнтами відповідних приєднаних мас і моментів. Теоретичні та експериментальні дослідження показують, що приєднані маси і моменти навіть на глибокій моді можуть

збільшувати складові інерційних сил і моментів майже в два рази, тому їх точне визначення є важливою задачею для прогнозування руху судна. Цій проблемі присвячено багато робіт, за допомогою теоретичних і експериментальних досліджень отримана значна кількість емпіричних моделей для їх визначення. При цьому виявились значні розбіжності результатів, отриманих за допомогою цих моделей. В даному дослідженні отримана строга оцінка можливої області зміни приєднаних мас і моменту при маневруванні судна на глибокій воді, проведений аналіз існуючих моделей і запропонована ефективна емпірична модель для їх визначення.

Ключові слова: приєднані маси, приєднані моменти корпусу судна, маневри судна, емпіричні формули.

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими або практичними завданнями

Методи математичного моделювання є одним із основних методів дослідження в судноводінні [1 – 4]. Розвиток сучасного тренажерного обладнання, авторульових, створення безекіпажних суден, прогнозування маневрування судна неможливі без наявності адекватних сучасних математичних моделей руху судна. Математичні моделі динаміки судна є багаторівневі моделі і складаються із різних моделей інерційних та неінерційних сил і моментів на корпусі судна [5 – 20], та рушійно – керуючих органів [21 – 26]. Існують різні підходи до побудови математичних моделей руху судна, які в основному залежать від вибору системи координат та способів визначення вхідних параметрів. Зокрема, можна виділити класичний підхід [1 – 8], в якому центр координат вибирається в центрі тяжіння судна і метод MMG [9 – 19, 25], в якому використовують систему координат, пов'язану із геометричним центром судна. В будь-якому випадку обидва підходи спираються на одні і ті ж гідродинамічні сталі. Зокрема, при визначенні інерційних сил і моментів ключовим є питанням визначення приєднаних мас і моментів на корпусі судна, які можуть суттєво змінювати інерційні характеристики судна.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і виділення невирішених раніше частин загальної проблеми

Дослідженню приєднаних мас на корпусі судна присвячено багато робіт [26 – 36], які поєднують теоретичні і експериментальні підходи і проводились як на глибокій воді, так і мілководді. Одним із таких методів є класичний метод еквівалентного тривісного еліпсоїда [1 – 6], який замінює визначення приєднаних мас і моментів на корпусі судна визначенням приєднаних мас еквівалентного (витягнутого) тривісного еліпсоїда, виміри якого пов'язані із геометрією судна. Значення приєднаних мас і моментів для такого еліпсоїда визначають за допомогою графіків або отриманих на їх основі емпіричних формул [2, 3]. Але такі результати, оскільки форма сучасних комерційних суден суттєво відрізняється від тривісного еліпсоїда, дають значні похибки. Іншим, більш точним методом, є метод плоских перерізів [4 – 5, 27], який зводить тривимірну задачу до двовірної задачі визначення приєднаних мас і моментів для плоских перерізів корпусу судна. Ця задача розв'язувалась або експериментально [26, 28 – 30], або за допомогою двовірних потенціалів [5, 27, 31]. В результаті отримані або графічні залежності, або емпіричні формули [31 – 36]. Відомі [4, 6, 27] також емпіричні формули для приєднаних мас і моменту, які отримані на основі експериментальних досліджень. Аналіз існуючих моделей показав, що навіть на глибокій воді вони дають різні результати, крім того, невідомі чіткі критерії, яким повинні задовольняти коефіцієнти приєднаних мас і моменту для корпусів реальних суден на глибокій воді.

Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Метою даної роботи є дослідження поведінки приєднаних мас до корпусу судна при плоскому русі на глибокій воді та отримання нових адекватних математичних моделей для їх обчислення.

Виклад матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів

1. Система диференціальних рівнянь плоского руху судна в кінематичних координатах

Позначимо безрозмірний час τ , а безрозмірні кінематичні координати судна так: β – кут дрейфу, $\tilde{v}$ – величина швидкості судна, ω – величина кутової швидкості. Тоді в зв'язаній із судном системі координат $S_G: GXYZ$, де G – центр тяжіння судна, плоский (3D) рух судна буде описуватись наступною системою диференціальних рівнянь [2, 4, 7, 8]:

$$\begin{cases} m_{11}(\frac{d\tilde{v}}{d\tau}\cos\beta - \tilde{v}\frac{d\beta}{d\tau}\sin\beta) + m_0\tilde{v}^2\omega\sin\beta = \tilde{N}_x^*, \\ -m_{22}(\frac{d\tilde{v}}{d\tau}\sin\beta + \tilde{v}\frac{d\beta}{d\tau}\cos\beta) + m_{26}\frac{d(\tilde{v}\omega)}{d\tau} + m_0\tilde{v}^2\omega\cos\beta = \tilde{N}_y^*, \\ m_{66}\frac{d(\tilde{v}\omega)}{d\tau} - m_{26}(\frac{d\tilde{v}}{d\tau}\sin\beta + \tilde{v}\frac{d\beta}{d\tau}\cos\beta) = \tilde{M}_z^*. \end{cases} \quad (1)$$

Тут введені позначення

$$\begin{aligned} \tilde{N}_x^* &= \tilde{v}^2 \tilde{N}_x - m_{22}^*\omega\sin\beta + m_{26}\omega^2; \quad \tilde{N}_y^* = \tilde{v}^2 \tilde{N}_y - m_{11}^*\omega\cos\beta; \\ \tilde{M}_z^* &= \tilde{v}^2 \tilde{M}_z + m_{12}\frac{1}{2}\sin 2\beta - m_{26}\omega\cos\beta; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} m_{jj} &= m_0(1 + m_{jj}^*); \quad m_{jj}^* = \frac{\lambda_{jj}}{m} m_0; \quad j = 1, 2; \quad m_0 = \frac{2C_B B}{\sigma_d L}; \\ m_{66} &= \tilde{\rho}_z^2 m_0(1 + \frac{\lambda_{66}}{J_z}); \quad m_{26} = m_0 \frac{\lambda_{26}}{mL}; \quad m_{12} = m_{11} - m_{22}. \end{aligned} \quad (3)$$

де L, B, T – відповідно довжина, ширина і осадка судна; C_B – коефіцієнт загальної повноти; $\tilde{N}_x, \tilde{N}_y, \tilde{M}_z$ – безрозмірні складові результуючої неінерційних сил і моменту, що діють на судно; $J_z = \tilde{\rho}_z^2 mL^2$ – момент інерції судна навколо осі Z ; $\tilde{\rho}_z = \rho_z / L$ – відносний радіус інерції судна;

2. Приєднані маси і коефіцієнти приєднаних мас судна при плоскому русі

При русі судна у воді її частина, яка розташована досить близько до судна, рухається разом із ним, впливаючи на інерційні сили і моменти повороту. Маси вказаної рідини визначають в напрямку осей координат і називають приєднаними масами в напрямку відповідної осі, а створювані нею моменти – приєднаними моментами і статичними моментами відносно осі координат, які виникають за рахунок зміщення центрів тяжіння рідини по кожній осі відносно центру тяжіння судна. Для плоского руху симетричного судна не нульовими вважають наступні із вказаних величини:

- λ_{11} і λ_{22} – приєднані маси води відповідно вздовж осей X і Y ;

- λ_{66} – приєднаний момент води навколо осі Z;
- λ_{26} – приєднаний статичний момент навколо осі Z.

При обчисленні коефіцієнтів (3) системи (1) і (2) переходять до наступних безрозмірних коефіцієнтів:

- $k_{11} = \frac{\lambda_{11}}{m}$, $k_{22} = \frac{\lambda_{22}}{m}$ – приєднаних мас, $m = \rho C_B L B T$ – маса судна, ρ – густина води;
- $k_{66} = \frac{\lambda_{66}}{J_z} = \frac{\lambda_{66}}{\tilde{\rho}_z^2 m L^2}$ – приєданого моменту інерції рідини відносно осі Z;
- $k_{26} = \frac{\lambda_{26}}{m L}$ – приєданого статичного моменту рідини відносно осі Z, який згідно його

фізичного змісту, можна подати так: $k_{26} = \tilde{x}_{26} k_{22}$, де $\tilde{x}_{26} = \frac{\lambda_{26}}{\lambda_{22} L}$ – відносна абсциса центру поперечної приєднаної маси, величина якої, зазвичай змінюється в межах: $-0.1 < \tilde{x}_{26} < 0.1$.

Зазвичай, безрозмірні коефіцієнти приєднаних мас і моменту подають через геометричні характеристики судна:

$$\eta_1 = C_B; \eta_2 = \frac{B}{L}; \eta_3 = \frac{T}{L}; \eta_4 = \frac{T}{B}, \quad (4)$$

шляхом обробки експериментальних даних, або за допомогою обчислювальної гідродинаміки.

3. Визначення приєднаних мас і моменту методом плоских перерізів

Для визначення коефіцієнтів k_{11} , k_{22} і k_{66} , та можливих областей їх зміни, застосуємо метод плоских перерізів. Для цього розглянемо поперечний і повздовжній рух судна в системі координат S_G . Нехай площа зануреної частини перерізу, який утвориться в результаті перетину корпусу судна в точці x на координатній осі X площиною, перпендикулярною до неї, дорівнює $S_{yk}(x)$, а площа приєднаних мас, які оточують цей переріз дорівнює $S_{yw}(x)$. Площу зануреної частини перерізу корпусу судна площиною, яка проходить через точку y на координатній осі Y перпендикулярно до неї, будемо вважати рівною $S_{xk}(y)$, а площу приєднаних мас, які оточують цей переріз будимо вважати рівною $S_{xw}(y)$. Будемо вважати, що центр мас судна лежить в площині міделя і діаметральній площині, тоді масу судна m , момент інерції судна J_z , та приєдані маси λ_{11} , λ_{22} і приєднаний момент λ_{66} можна записати так:

$$m = \rho \int_{-L/2}^{L/2} S_{yk}(x) dx = \rho \int_{-B/2}^{B/2} S_{xk}(y) dy, \quad J_z = \rho \int_{-L/2}^{L/2} x^2 S_{yk}(x) dx, \quad (5)$$

$$\lambda_{11} = \rho \int_{-B/2}^{B/2} S_{xw}(y) dy, \quad \lambda_{22} = \rho \int_{-L/2}^{L/2} S_{yw}(x) dx, \quad \lambda_{66} = \rho \int_{-L/2}^{L/2} x^2 S_{yw}(x) dx. \quad (6)$$

Перейдемо в інтегралах (5), (6) на проміжок $[-1;1]$. Для цього виконаємо заміни: $x = \frac{L}{2} x_0$, $y = \frac{B}{2} y_0$ і введемо нові функції: $S_{yk}^0(x_0) = S_{yk}(x_0 \frac{L}{2})$, $S_{wk}^0(x_0) = S_{wk}(x_0 \frac{L}{2})$, $S_{xk}^0(y_0) = S_{xk}(y_0 \frac{B}{2})$, $S_{xw}^0(y_0) = S_{xw}(y_0 \frac{B}{2})$, а також їх відношення:

$$\kappa_x(x_0) = \frac{S_{yw}^0(x_0)}{S_{yk}^0(x_0)}, \quad \kappa_y(y_0) = \frac{S_{xw}^0(y_0)}{S_{xk}^0(y_0)}, \quad (7)$$

тоді формули (5) і (6) запишемо так:

$$m = \frac{\rho L}{2} \int_{-1}^1 S_{yk}^0(x_0) dx_0 = \frac{\rho B}{2} \int_{-1}^1 S_{xk}^0(y_0) dy_0, \quad J_z = \frac{\rho L^3}{2} \int_{-1}^1 x_0^2 S_{yk}^0(x_0) dx_0, \quad (8)$$

$$\lambda_{11} = \frac{\rho B}{2} \int_{-1}^1 \kappa_y(x_0) S_{xk}^0(y_0) dy_0, \quad \lambda_{22} = \frac{\rho L}{2} \int_{-1}^1 \kappa_x(x_0) S_{yk}^0(x_0) dx_0, \quad \lambda_{66} = \frac{\rho L^3}{2} \int_{-1}^1 \kappa_x(x_0) S_{yk}^0(x_0) x_0^2 dx_0 \quad (9)$$

Із урахуванням останніх отримаємо наступні вирази для безрозмірних коефіцієнтів приєднаних мас і моменту:

$$k_{11} = \frac{\int_{-1}^1 \kappa_y(y_0) S_{xk}^0(y_0) dy_0}{\int_{-1}^1 S_{xk}^0(y_0) dy_0}; \quad k_{22} = \frac{\int_{-1}^1 \kappa_x(x_0) S_{yk}^0(x_0) dx_0}{\int_{-1}^1 S_{yk}^0(x_0) dx_0}; \quad k_{66} = \frac{\int_{-1}^1 \kappa_x(x_0) S_{yk}^0(x_0) x_0^2 dx_0}{\int_{-1}^1 S_{yk}^0(x_0) x_0^2 dx_0}. \quad (10)$$

Отримані вирази (10) дають можливість визначити і, принаймні, оцінити значення коефіцієнтів k_{11} , k_{22} і k_{66} для корпусів реальних суден. Особливістю цих формул полягає в тому, що вони використовують плоскі перерізи суден (тіл), для яких приєднані маси вивчені набагато краще ніж для тривимірних тіл. Цей підхід лежить в основі методу плоских перетинів [5, 26] визначення приєднаних мас і моментів корпусу судна.

4. Побудова апроксимаційних формул для визначення приєднаних мас і моменту судна та визначення діапазону їх зміни

Функції $\kappa_x(x_0)$ і $\kappa_y(y_0)$ в поданнях (7) визначають зв'язок між площинами поперечного і повздовжнього перерізів і площинами доданих приєднаних мас для даного плоского перерізу у відповідному напрямку. Точні аналітичні подання для вказаних функцій в загальному випадку наразі не відомі, тому перейдемо до наступних апроксимаційних подань:

$$\kappa_x(x_0) = \kappa_{x0}(1 - \alpha_x x_0^2), \quad \kappa_y(y_0) = \kappa_{y0}(1 - \alpha_y y_0^2). \quad (11)$$

При цьому коефіцієнти κ_{x0} , κ_{y0} уточнюють форму перерізу відповідно на міделі і діаметральній площині, а параметри α_x , α_y описують зміну площі перерізу відповідно по довжині і ширині судна. Ці величини визначимо, спираючись на наступні міркування. Коли тіло рухається в тому чи іншому напрямку в рідині, воно змушує оточуючу рідину рухатись разом із ним. Ця рідина поводить ся так, ніби вона є частиною тіла, тому замість власної маси маємо ефект приєднаних мас, які впливають на інерційні сили і моменти. Із теорії гідродинаміки відомо, що коли плоский переріз співпадає із кругом, потік води найкраще «захоплюється» тілом на одиницю площі, при цьому: $S_{yw}^0(x_0) = S_{yk}^0(x_0)$, $S_{xw}^0(y_0) = S_{xk}^0(y_0)$, і отже $\kappa_{x0} = 1$, $\kappa_{y0} = 1$. Для будь яких інших плоских перерізів корпусу судна приєднана маса буде менше площі перерізу, тому маємо наступні умови:

$$\kappa_{x0}(x_0) \leq 1, \quad \kappa_{y0}(y_0) \leq 1. \quad (12)$$

Зупинимось детальніше на деяких інших можливих плоских перерізах корпусів судна. При дослідження приєднаних мас судна в першому наближенні форму його корпусу часто

прив'язують до еквівалентного тривісного еліпсоїда, в якому осі вибирають так: $a = L/2$, $b = B/2$, $c = T$. Перерізом такого судна на міделі буде еліпс із півосями $a = B/2$ і $c = T$, площа якого: $S_{yk}^0(0) = \pi \frac{BT}{2}$, а площа приєднаних мас [5, 27] $S_{wk}^0(0) = \pi T^2$. Отже, при $T < B/2$, маємо: $\kappa_{x0} = \kappa_{x0}^{el} = \frac{2T}{B} < 1$. Аналогічно, для діаметрального перерізу отримаємо $\kappa_{y0} = \kappa_{y0}^{el} = \frac{2T}{L} < 1$.

При великому коефіцієнті повноти C_B , поперечний переріз судна на міделі може наближатись до прямокутника, з розмірами $T \times B$, а діаметральний переріз до прямокутника $T \times L$, тобто $S_{yk}^0(0) = BT$ а $S_{wk}^0(0) = LT$. Для коефіцієнти κ_{x0} і κ_{y0} в цьому випадку, скориставшись результатами роботи [26], отримаємо наступні апроксимаційні формули похибка яких не перевищує 2% для реальних суден: $\eta_3 \in (0.02; 0.1)$, $\eta_4 \in (0.1; 0.45)$:

$$\kappa_{x0} = \kappa_{x0}^{pr} = \frac{\pi}{4} \eta_3 (0.5 + 0.68\eta_3 - 0.24\eta_3^2), \quad \kappa_{y0} = \kappa_{y0}^{pr} = \frac{\pi}{4} \eta_4 (0.5 + 0.56\eta_4 - 0.06\eta_4^2), \quad (13)$$

Еліпс і прямокутник є граничними перерізами на міделі і діаметральній площині для будь яких інших перерізів реальних суден. Це дає можливість для останніх записати наступні подання:

$$\kappa_{x0} = 2\xi_x \eta_3 + (1 - \xi_x) \frac{\pi}{4} \eta_3 (0.5 + 0.68\eta_3 - 0.24\eta_3^2) \quad (14)$$

$$\kappa_{y0} = 2\xi_y \eta_4 + (1 - \xi_y) \frac{\pi}{4} \eta_4 (0.5 + 0.56\eta_4 - 0.06\eta_4^2), \quad (15)$$

В цих моделях параметри ξ_x , ξ_y враховують форму перерізу відповідно на міделі і діаметральній площині і залежать від коефіцієнту повноти C_B . Для їх обчислення можна, зокрема, використати наступні формули:

$$\kappa_{0x}(C_B) = \begin{cases} 0.85, & C_B < 0.54, \\ 0.8 - 1.333(C_B - 0.54), & 0.54 \leq C_B \leq 0.84, \\ 0.3, & C_B > 0.84. \end{cases} \quad (16)$$

$$\kappa_{0y}(C_B) = \begin{cases} 0.9, & C_B < 0.54, \\ 0.9 - 1.367(C_B - 0.54), & 0.54 \leq C_B \leq 0.84, \\ 0.45, & C_B > 0.84. \end{cases} \quad (17)$$

Зауважимо, що значення ξ_x , ξ_y змінюються в залежності від значення C_B , наступним чином: для більших значень C_B значення ξ_x , ξ_y менші, а форми перерізів наближаються до прямокутної; для менших C_B значення ξ_x , ξ_y стає більшим, а форми перерізів наближається до еліптичної. При цьому, $\xi_x \in (0.4; 0.65)$, $\xi_y \in (0.045; 0.2)$, крім того виконується умова:

$$\xi_x > \xi_y \quad (18)$$

В таблиці 1 наведенні значення геометричних характеристик (4) для 16 основних типів суден, а також значення уточнюючих коефіцієнти κ_{x0} , κ_{y0} для цих суден, а саме танкерів (ST): LPG, VLGC, KVLCC2, VLCC ESS0; контейнеровозів (SCo): SR 108, KCS, DTC; автомобілевоза (Scar): PCC; балкерів (SB): Handysize (Hz), Supramax (Sm), Kamsarmax (Km),

Capsize (Cs); риболовецьких суден (SF): японського (J), сейнера (S) і двох навчально промислових риболовецьких суден (T).

Таблиця 1. Параметри η_j , $j = \overline{1;4}$; ξ_x , ξ_y , α_x , α_y для деяких типів суден.

№	Тип	$\eta_1 = C_B$	$\eta_2 = B/L$	$\eta_3 = T/L$	$\eta_4 = T/B$	ξ_x	ξ_y	α_x	α_y
1	LPG	0.74	0.174	0.060	0.3451	0.455	0.076	0.254	0.188
2	VLGC	0.72	0.162	0.052	0.3224	0.436	0.080	0.270	0.200
3	KVLCC2	0.80	0.181	0.065	0.3586	0.432	0.099	0.211	0.156
4	VLCC ESS0	0.83	0.163	0.067	0.4113	0.477	0.103	0.192	0.142
5	SR 108	0.56	0.145	0.049	0.3347	0.558	0.074	0.421	0.311
6	KCS	0.65	0.140	0.047	0.3354	0.501	0.049	0.330	0.245
7	DTC	0.66	0.144	0.041	0.2843	0.417	0.043	0.321	0.238
8	PCC	0.54	0.170	0.048	0.2844	0.484	0.051	0.442	0.327
9	SB Hm	0.80	0.174	0.062	0.3567	0.429	0.095	0.211	0.156
10	SB Sm	0.77	0.162	0.061	0.3789	0.480	0.094	0.232	0.172
11	SB Km	0.80	0.141	0.063	0.4105	0.550	0.096	0.211	0.156
12	SB Cs	0.83	0.155	0.063	0.4044	0.468	0.096	0.192	0.142
13	SFJ	0.684	0.220	0.081	0.3704	0.530	0.086	0.300	0.222
14	SFT 1	0.617	0.200	0.074	0.3690	0.576	0.078	0.361	0.268
15	SFS	0.557	0.214	0.079	0.3676	0.616	0.083	0.424	0.313
16	SFT 2	0.538	0.209	0.082	0.3922	0.673	0.087	0.445	0.328

Розглянемо параметри α_x , α_y у формулах (11). При $\alpha_x = 0$, $\alpha_y = 0$ зуження перерізів не буде, тобто тіло буде представляти собою прямий паралелепіпед із розмірами: $L \times B \times T$. При $\alpha_x = 1$, $\alpha_y = 1$ буде спостерігатись еліптичне спадання перерізів до нуля (відповідно від міделі до носа і корми і від діаметральної площини до правого і лівого борту). Ці два випадки є граничними випадками для реальних суден, отже повинні виконуватись умови:

$$0 < \alpha_x < 1, 0 < \alpha_y < 1 \quad (18)$$

Для реальних суден, враховуючи що на міделі і діаметральній площині форму перерізу за рахунок уточнюючих коефіцієнтів κ_{x0} , κ_{y0} можна вважати відомою, а також те, що значення приєднаних мас для тривісного еліпсоїда також відомі [1, 3], не важко отримати наступні апроксимаційні формули:

$$\alpha_x(C_B) = \begin{cases} 0.15, & \tilde{\alpha}_x(C_B) < 0.15, \\ \tilde{\alpha}_x(C_B), & 0.15 \leq \tilde{\alpha}_x(C_B) \leq 0.6, \\ 0.6, & \tilde{\alpha}_x(C_B) > 0.6. \end{cases} \quad (19)$$

$$\alpha_y(C_B) = \begin{cases} 0.1, & \tilde{\alpha}_y(C_B) < 0.1, \\ \tilde{\alpha}_y(C_B), & 0.1 \leq \tilde{\alpha}_y(C_B) \leq 0.45, \\ 0.45, & \tilde{\alpha}_y(C_B) > 0.45. \end{cases} \quad (20)$$

Тут введені позначення:

$$\tilde{\alpha}_x(C_B) = 0.113 + 0.313(1 - C_B) + 0.875(1 - C_B)^2, \quad \tilde{\alpha}_y(C_B) = 0.08 + 0.26(1 - C_B) + 0.6(1 - C_B)^2.$$

Зауважимо, що похибка подань (19), (20) не перевищує 4% для реальних суден: $C_B \in (0.5; 0.85)$. При цьому при поперечному русі, значення α_x дещо більші ніж значення α_y при повздовжньому русі: $\alpha_x > \alpha_y$. Це пояснюється більш повільним зменшення паралельних перерізів від діаметральної площини до бортів, ніж від міделя до носу корми. В таблиці 1 наведені начиння цих параметрів для основних типів комерційних суден.

Отримані вище результати дають для корпусів реальних суден записати наступні оцінки.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 S_{xk}^0(y_0) dy_0 &> \int_{-1}^1 \kappa_y(y_0) S_{xk}^0(y_0) dy_0, \quad \int_{-1}^1 S_{yk}^0(x_0) dx_0 > \int_{-1}^1 \kappa_x(x_0) S_{yk}^0(x_0) dx_0, \\ \int_{-1}^1 \kappa_x(x_0) S_{yk}^0(x_0) dx_0 &> \int_{-1}^1 \kappa_y(y_0) S_{xk}^0(y_0) dy_0 \\ \int_{-1}^1 S_{yk}^0(x_0) x_0^2 dx_0 &> \int_{-1}^1 \kappa_x(x_0) S_{yk}^0(x_0) x_0^2 dx_0, \quad \int_{-1}^1 \kappa_x(x_0) S_{yk}^0(x_0) dx_0 > \int_{-1}^1 \kappa_x(x_0) S_{yk}^0(x_0) x_0^2 dx_0 \end{aligned}$$

Останні нерівності дають можливість записати наступні умови, яким повинні задовольняти приєднані маси і момент корпуси суден на глибокій воді:

$$k_{11} \ll k_{66} < k_{22} < 1, \quad k_{11}^{el} < k_{11}, \quad k_{66}^{el} < k_{66}, \quad k_{22}^{el} < k_{22}, \quad (21)$$

де k_{11}^{el} , k_{22}^{el} , k_{66}^{el} – приєднані маси і момент для еквівалентного тривісного еліпсоїда. Подвійна нерівність показує, що коефіцієнт приєднаної маси k_{11} в повздовжньому напрямку майже на порядок менше коефіцієнтів приєднаних мас і моменту в поперечному напрямку.

5. Аналіз існуючих емпіричних моделей для приєднаних мас і моменту

На разі, відома низка емпіричних залежностей від геометричних параметрів корпусу судна (4) для коефіцієнтів приєднаних мас і моменту. В таблиці 2 наведені основні із них.

Таблиця 2. Математичні моделі для коефіцієнтів k_{jj} ($j = 1, 2, 6$)

Коефіцієнт	№	Математична модель	Джерело
k_{11}	1	$k_{10}^* 0.93\eta_3 - 0.056\eta_4$	[1, 2]
	2	$2.79\sqrt[3]{\eta_1\eta_2\eta_3}^2$	[31, 32]
	3	$0.01\{11.97\eta_1(1+3.73\eta_4)+2.89\frac{\eta_1}{\eta_2}(1+1.13\eta_4)+$ $+0.175\frac{\eta_1}{\eta_2^2}(1+0.54\eta_4)-1.107\frac{\eta_4}{\eta_1}+0.398\}$	[33]
	4	$0.2425\eta_1\eta_2\eta_4+0.2737\eta_1\eta_2+0.012\eta_4-10^{-4}$	[34]

Коефіцієнт	№	Математична модель	Джерело
	5	$2\eta_3(0.36 + 5.76\eta_2^2)(0.624 + 0.72\eta_1)$	[4, 6]
	6	$\frac{\eta_4^3(5.91\eta_2^2 + 7.76\eta_2 - 0.269)}{48.4\eta_4^3 - 6.89\eta_4^2 + 1.47\eta_4 - 0.0475}$	[4, 6]
k_{22}	1	$k_{20}^* 2\eta_4 - \eta_3$	[1, 2]
	2	$\frac{\pi}{2}(0.16 + \frac{\eta_4}{\eta_1} - 5.1 \frac{\eta_2\eta_3}{\eta_1})$	[31, 32]
	3	$0.882 - 0.54\eta_1(1 - 1.6\eta_4) - 0.156(1 - 0.673\eta_1) \frac{1}{\eta_2} +$ $+0.826 \frac{\eta_4}{\eta_2}(1 - 0.678\eta_4) - 0.638\eta_1 \frac{\eta_4}{\eta_2}(1 - 0.669\eta_4));$	[33]
	4	$0.009 \frac{\eta_1\eta_4}{\eta_2} - 0.2395 \frac{\eta_1}{\eta_2} + 3.8295\eta_4 + 0.5892$	[34]
	5	$3.76\eta_4\theta_{22}(\alpha, \sigma_d)$	[4, 6]
	6	$\frac{\eta_4(1.022 - \eta_2^2)(0.224\eta_1 + 0.722)}{0.264\eta_4 + 0.368}$	[4, 6]
k_{66}	1	$k_{20}^* 2.06\eta_4 - 3.52\eta_3$	[1, 2]
	2	$\frac{\pi}{24\tilde{\rho}_z}(0.2 + \frac{\eta_4}{\eta_1} - 4 \frac{\eta_3}{\eta_1})$	[31, 32]
	3	$\{\frac{1}{10\tilde{\rho}_z}(33 - 76.85\eta_1(1 - 0.784\eta_1) - 3.43 \frac{1 - 0.63\eta_1}{\eta_2})\}^2$	[33]
	4	$0.547 \frac{\eta_1\eta_4}{\eta_2} - 1.175 \frac{\eta_1}{\eta_2} + 6.9125\eta_4 + 2.988$	[34]
	5	$\frac{1.68\eta_4}{1 + \eta_2^2}\theta_{66}(C_{WL}, \sigma_d)$	[4, 6]
	6	$\eta_4(0.357 - 1.71\eta_2^2)(1.562\eta_1 + 5.18)$	[4, 6]

В таблиці введені наступні позначення:

$$k_{10}^* = \{1, \text{при } C_B < 0.8; 1.4, \text{при } C_B \geq 0.8\}; k_{20}^* = \{1, \text{при } C_B < 0.8; 1.3, \text{при } C_B \geq 0.8\}.$$

$$\theta_{22} = \frac{6(1 - C_{WL}\sigma_d)}{C_{WL}(1 + \sigma_d)(2 - C_{WL} - \sigma_d)}; \theta_{66} = \frac{2\sigma_d(9 - 6C_{WL} - 6\sigma_d + 4C_{WL}\sigma_d)(3 - 2C_{WL} - 2\sigma_d + C_{WL}\sigma_d^2)}{C_{WL}(6 - 5C_{WL} - 5\sigma_d + 4C_{WL}\sigma_d)(9 - 9\sigma_d + 2\sigma_d^2)}.$$

У формулах для k_{22} і k_{66} п'ятих математичних моделей із таблиці 2 присутні безрозмірні коефіцієнт повноти площі ватерлінії C_{WL} і приведений коефіцієнт повноти зануреної частини батоксу σ_d .

Наявність такої значної кількості емпіричних моделей призводить до необхідності вибору найбільш адекватніших із них, які б найточніше визначали приєднані маси і моменти

та були простими в застосуванні при вивченні маневрів будь якого типу суден на глибокій воді. Для тестування моделей вибрані 16 суден різних типів, геометричні параметри яких наведені в таблиці 1. Обчислення показали, що ні одна із моделей, крім першої, не задовольняє умовам (21), зокрема, моделі 2 дає дещо завищені значення k_{11} , суттєво завищені значення k_{22} , які навіть перевищують одиницю для деяких суден, при цьому значення k_{66} суттєво занижені в порівнянні із еквівалентним тривісним еліпсоїдом. Модель 3 дає також завищені значення для k_{11} , k_{22} і k_{66} , при цьому $k_{66} > k_{22}$ для багатьох суден і для деяких $k_{66} > 1$. Модель 4 і 5 дають більш менш прийнятні значення для k_{11} , але при цьому для коефіцієнтів k_{22} і k_{66} умови (21) значно порушені. Непогані результати дає модель 6, але для деяких суден умова $k_{66} < k_{22}$ також порушується. Крім того, всі моделі, крім першої, є дещо складними в застосуванні, а модель 5 використовує параметри C_{WL}, σ_d , які не завжди доступні у відкритих джерелах і приходиться використовувати для них різного роду апроксимаційні формули.

Таблиця 3. Значення k_{11} , k_{22} і k_{66} для тривісного еліпсоїда і моделі №1.

№	Тип	C_B	Тривісний еліпсоїд			Модель №1		
			k_{11}^{el}	k_{22}^{el}	k_{66}^{el}	k_{11}	k_{22}	k_{66}
1	LPG	0.74	0.0356	0.611	0.487	0.0364	0.6303	0.5002
2	VLGC	0.72	0.0295	0.584	0.464	0.0305	0.5926	0.4804
3	KVLCC2	0.80	0.052	0.656	0.491	0.05651	0.8479	0.6630
4	VLCC ESS0	0.83	0.04	0.751	0.592	0.05509	0.9822	0.7946
5	SR 108	0.56	0.025	0.612	0.484	0.02643	0.6207	0.5184
6	KCS	0.65	0.024	0.613	0.495	0.02489	0.6239	0.5256
7	DTC	0.66	0.0213	0.513	0.421	0.02206	0.5278	0.4419
8	PCC	0.54	0.0281	0.505	0.407	0.02907	0.5204	0.4155
9	SB Hm	0.80	0.0405	0.633	0.503	0.05303	0.8465	0.6705
10	SB Sm	0.77	0.0351	0.675	0.545	0.03580	0.6965	0.5647
11	SB Km	0.80	0.035	0.824	0.675	0.04725	0.9860	0.8216
12	SB Cs	0.83	0.038	0.734	0.602	0.05000	0.9700	0.7959
13	SFJ	0.684	0.0515	0.647	0.461	0.05496	0.6593	0.4764
14	SFT 1	0.617	0.0454	0.653	0.485	0.04797	0.6642	0.5004
15	SFS	0.557	0.0512	0.643	0.461	0.05247	0.6567	0.4808
16	SFT 2	0.538	0.0521	0.694	0.505	0.05418	0.7024	0.5197

Отже, найбільш адекватною, згідно умовам (21), а також простою в застосуванні виявилась модель 1. В таблиці 3 наведені значення коефіцієнтів k_{11}^{el} , k_{22}^{el} , k_{66}^{el} , для еквівалентного тривісного еліпсоїда, які отримані за допомогою графіків [3, 4] і значення коефіцієнтів k_{11} , k_{22} і k_{66} , які отримані за допомогою моделі 1 для суден із таблиці 1.

6. Побудова нової математичної моделі для приєднаних мас і моментів для плоского руху судна

Незважаючи на досить адекватні результати, які отримані за допомогою математичної моделі 1, в неї є один суттєвий недолік, це уточнюючі коефіцієнти k_{10}^* і k_{20}^* . Згідно із задумом

авторів[3], вони покликані збільшити значення коефіцієнтів приєднаних мас і моменту для досить повних, «тілесних» корпусів, які мають значні циліндричні вставки і досить великі значення коефіцієнту загальної повноти: $C_B > 0.8$. Але таке збільшення «стрибком» починаючи із значення $C_B = 0.8$ одразу на 40% і 30% виглядає сумнівним. На наш погляд, таке збільшення повинно відбуватись неперервно в залежності від C_B , та інших параметрів судна.

Для усунення цього недоліка пропонується застосувати для побудови математичних моделей нових уточнюючих коефіцієнтів k_{10} і k_{20} «сигмоїдну» модель. Згідно якої ці коефіцієнти подамо так:

$$k_{10} = 1 + 0.4\sigma(u_x), k_{10} \in (1; 1.4); k_{20} = 1 + 0.3\sigma(u_y), k_{20} \in (1; 1.3), \quad (22)$$

де $\sigma(u) = \frac{1}{1+e^{-u}} \in (0; 1)$ – сигмоїда. Нормовані скаляри повноти: повздовжній u_x і поперечний u_y подамо через наступні скалярні добутки:

$$u_x = w_{0x} + \bar{\mu}_* \cdot \bar{w}_x, u_y = w_{0y} + \bar{\mu}_* \cdot \bar{w}_y \quad (23)$$

Компоненти вектора стандартних відхилень $\bar{\mu}_*$ геометричних параметрів судна подамо через статистичні математичні сподівання і середні квадратичні відхилення (масштаби варіації) так:

$$\mu_k = \frac{\eta_k - \bar{\eta}_k}{s_k}, k = 1, 2, 3, 4, \mu_5 = \frac{1}{\eta_4} - \frac{1}{\bar{\eta}_4}, \quad (24)$$

$$\bar{\eta}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_{kj}, s_k = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\eta_{kj} - \bar{\eta}_k)^2}, k = 1, 2, 3, 4. \quad (25)$$

Тут η_k ⁴ геометричні параметри (4) конкретного судна, для якого визначаються коефіцієнти приєднаних мас і моменту, а η_{kj} набір відомих геометричних параметрів N реальних суден:

$$\eta_{1j} = C_{Bj}, \eta_{2j} = \frac{B}{L}_j, \eta_{3j} = \frac{T}{L}_j, \eta_{4j} = \frac{T}{B}_j, j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (26)$$

В нашому випадку для суден, вказаних в таблиці 1, отримаємо наступні значення:

$$\bar{\eta}_k^4 = 0.7 \quad 0.17 \quad 0.06 \quad 0.36, s_k^4 = 0.1 \quad 0.03 \quad 0.02 \quad 0.06 \quad (25)$$

Компоненти вагових векторів $\bar{w}_x$ і $\bar{w}_y$ визначають вплив кожного геометричного параметра судна (4) на приєднані маси і момент, а константи w_{0x} і w_{0y} визначають середнє значення відповідно коефіцієнтів k_{10} і k_{20} для типового судна. Для нашого випадку $w_{0x} = 0.3$ і $w_{0y} = 0.5$, $\bar{w}_x = (1.6; 0.4; 0.6; 1.2; 0.2)$ і $\bar{w}_y = (1.8; 0.9; 0.9; -0.4; 0.4)$.

В таблиці 4 наведені результати валідації запропонованого підходу для визначення уточнюючих коефіцієнтів k_{10} , k_{20} та коефіцієнтів приєднаних мас і моменту. Результати підтверджують, що коефіцієнти плавно змінюються зі зміною коефіцієнту повноти і залежать також (в меншій мірі) від значень параметрів судна (4). При цьому коефіцієнти k_{11} , k_{22} і k_{66} задовольняють умовам (21), що показує їх адекватність.

Таблиця 4. Нормуючі коефіцієнти k_{10} , k_{20} , та коефіцієнти k_{11} , k_{22} і k_{66}

№	Тип	k_{10}	k_{20}	k_{11}	k_{22}	k_{66}
1	LPG	1.2226	1.2848	0.0462	0.7706	0.6110
2	VLGC	1.1688	1.1790	0.0355	0.6929	0.5616
3	KVLCC2	1.2758	1.3666	0.0551	0.8326	0.6507
4	VLCC ESS0	1.2861	1.3845	0.0535	0.9716	0.7860
5	SR 108	1.1492	1.1331	0.0268	0.6466	0.5415
6	KCS	1.1586	1.1550	0.0254	0.6504	0.5496
7	DTC	1.1034	1.0948	0.0201	0.5697	0.4761
8	PCC	1.1062	1.1045	0.0274	0.5476	0.4374
9	SB Hm	1.2689	1.3510	0.0521	0.8459	0.6672
10	SB Sm	1.2033	1.2427	0.0369	0.7269	0.5879
11	SB Km	1.2928	1.3732	0.0479	0.9864	0.9205
12	SB Cs	1.2804	1.3608	0.0506	0.9722	0.7991
13	SFJ	1.2106	1.2441	0.0584	0.7397	0.5327
14	SFT 1	1.1998	1.2339	0.0509	0.7358	0.5541
15	SFS	1.2051	1.2406	0.0553	0.7429	0.5434
16	SFT 2	1.2285	1.2682	0.0578	0.7775	0.5751

Висновки і перспектива подальшої роботи по даному напрямку

Отже строго обґрунтовані умови, яким повинні задовольняти коефіцієнти приєднаних мас і моменту плоского руху судна, що дало можливість проаналізувати існуючі математичні моделі і встановити найбільш адекватні із них. Запропоновано підхід корекції вказаної моделі, що дозволило рекомендувати для визначення приєднаних мас і моменту плоского руху судна на глибокій воді наступні емпіричні формули:

$$k_{11} = k_{10} \cdot 0.93\eta_3 - 0.056\eta_4, \quad (26)$$

$$k_{22} = k_{20} \cdot 2\eta_4 - \eta_3, \quad (27)$$

$$k_{66} = k_{20} \cdot 2.06\eta_4 - 3.52\eta_3, \quad (28)$$

Запропонований підхід може бути застосований для побудови математичних моделей приєднаних мас і моменту із урахуванням мілководдя.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Першиц Р. Я., *Керованість і управління судном*. Л.: Суднобудування, 1983.
- [2] Соболев Г. В., *Керованість корабля і автоматизація судноводіння*. Л.: Суднобудування, 1976.
- [3] Гофман А. Д., *Гребний-рульовий комплекс і маневрування судна: довідник*. Л.: Суднобудування, 1988.
- [4] Васильєв А. В., *Керованість суден: навчальний посібник*. Л.: Суднобудування, 1989.
- [5] Ремез Ю. В., *Хитавиця корабля*. Л.: Суднобудування, 1983, 328 с.
- [6] Павленко В.Г., *Хідкість і керованість суден*. Транспорт, 1991, 397 с.
- [7] Міюсов М. В., *Режими роботи і автоматизація пропульсивного комплексу теплохода з вітроподвигунами*. Одеса: ОГМА, ОКФА, 1996.

- [8] Кривий О. Ф., Методи математичного моделювання в задачах судноводіння. Одеса: ОНМА, 2015.
- [9] Ogawa A., Koyama T., Kijima K., "MMG report-I: on the mathematical model of ship manoeuvring," *Bull. Soc. Naval Archit. Jpn.*, no. 575, pp. 22–28, 1977. [in Japanese].
- [10] Ogawa A., Kasai H., "On the mathematical method of manoeuvring motion of ships," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 25, no. 292, pp. 306–319, 1978.
- [11] Matsumoto K., Suemitsu K., "The prediction of manoeuvring performances by captive model tests," *J. Kansai Soc. Naval Archit. Jpn.*, no. 176, pp. 11–22, 1980. [in Japanese].
- [12] Inoue S, Hirano M., Kijima K., Takashina J., "A practical calculation method of ship maneuvering motion," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 28, no. 325, pp. 207–222, 1981.
- [13] Inoue S, Hirano M., Kijima K., "Hydrodynamic derivatives on ship manoeuvring," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 28, no. 321, p. 67, 1981.
- [14] Yoshimura Y., Masumoto Y., "Hydrodynamic database and manoeuvring prediction method with medium high-speed merchant ships and fishing vessels," in *Proc. Int. Conf. Marine Simulation and Ship Manoeuvrability (MARSIM 2012)*, 2012, pp. 494–504
- [15] Yoshimura Y., Ma N., "Manoeuvring prediction of fishing vessels," in *Proc. MARSIM '03*, 2003, pp. RC-29-1–RS-29-10.
- [16] Yoshimura Y., Masumoto Y., "Hydrodynamic force database with medium high speed merchant ships including fishing vessels and investigation into a manoeuvring prediction method," *J. Japan Soc. Naval Architects Ocean Eng.*, vol. 14, pp. 63–73, 2011, doi: 10.2534/jjasnaoe.14.6
- [17] Yasukawa H., Yoshimura Y., "Introduction of MMG standard method for ship maneuvering predictions," *J. Mar. Sci. Technol.*, vol. 20, pp. 37–52, 2015, doi: 10.1007/s00773-014-0293-y
- [18] Yasukawa H., Sakuno R., "Application of the MMG method for the prediction of steady sailing condition and course stability of a ship under external disturbances," *J. Mar. Sci. Technol.*, vol. 25, pp. 196–220, 2020, doi: 10.1007/s00773-019-00641-4
- [19] Ayub F.A., Furukawa Y., "Comparison between cubic and quadratic models of hydrodynamic derivatives to the ship course stability index," *Int. J. Technol.*, vol. 15, no. 5, pp. 1502–1523, 2024, doi: 10.14716/ijtech.v15i5.7036
- [20] Кривий О. Ф., Міусов М. В., "Математична модель плаского руху судна за наявності вітропдвигунів", *Судноводіння*, № 26, с. 110–119, 2016.
- [21] Kryvyi O. F., Miyusov M. V., "Construction and analysis of mathematical models of hydrodynamic forces and moment on the ship's hull using multivariate regression analysis," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 15, no. 4, pp. 853–864, 2021, doi: 10.12716/1001.15.04.18
- [22] Kryvyi O. F., Miyusov M. V., "Mathematical model of hydrodynamic characteristics on the ship's hull for any drift angles," in *Advances in Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2019, pp. 111–117, doi: 10.1201/9780429341939
- [23] Kryvyi O., Miyusov M. V., Kryvyi M., "Construction and analysis of new mathematical models of the operation of ship propellers in different maneuvering modes," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 17, no. 1, pp. 853–864, 2023, doi: 10.12716/1001.17.01.09

- [24] Kryvyi O., Miyusov M. V., Kryvyi M., "Analysis of known and construction of new mathematical models of forces on a ship's rudder in an unbounded flow analysis," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 17, no. 4, pp. 831–839, 2023, doi: 10.12716/1001.17.04.09
- [25] Yoshimura Y., Nakamura M., Taniguchi T., and Yasukawa H., "Empirical formulas of hydrodynamic parameters for predicting ship maneuvering based on the MMG-model," *Ocean Eng.*, vol. 337, p. 121831, 2025, doi: 10.1016/j.oceaneng.2025.121831
- [26] Wendel K., "Hydrodynamische Massen und hydrodynamische Massenträgheitsmomente," *Jahrb. Schiffbautechn. Ges.*, vol. 44, pp. 207–255, 1950. [in German].
- [27] Korotkin A. I., *Added Masses of Ship Structures*. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2009, doi: 10.1007/978-1-4020-9432-3
- [28] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia of ships in steering motion," in *Proc. 1st Symp. Ship Manoeuvrability*, David Taylor Model Basin Rep. 1461, Washington, DC, USA, 1960.
- [29] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia for ship motions," *J. Zosen Kiokai*, no. 105, pp. 83–92, 1959. [in Japanese].
- [30] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia for ship motions: part 2. Added mass for the longitudinal motions," *J. Zosen Kiokai*, no. 106, pp. 59–62, 1960. [in Japanese].
- [31] Clarke D. et al., "The application of manoeuvring criteria in hull design using linear theory," in *Spring Meeting of the Royal Institution of Naval Architects*, 1982.
- [32] Hooft J.P., Pieffer J.B.M., "Manoeuvrability of frigates in waves," *Mar. Technol.*, vol. 25, 1988.
- [33] Zhou Z., Yan S., Feng W., "Maneuvering prediction of multiple-purpose cargo ships," *Ship Eng.*, vol. 6, pp. 21–36, 1983. [in Chinese].
- [34] Sadakane H., Toda Y., Lee Y.-S., "The simplified formulas to predict the coefficients of added mass and yaw added moment of inertia of a ship in shallow water," *J. Japan Inst. Navigation*, pp. 11–20, 2001.
- [35] Schneekluth H., and Bertram V., *Ship Design for Efficiency and Economy*, 2nd ed. Oxford, U.K.: Butterworth-Heinemann, 1998.
- [36] ITTC, "Appendix A: Manoeuvring in shallow and confined waters," in *Proc. 23rd Int. Towing Tank Conf.*, vol. 1, Venice, Italy, 2002, pp. 201–234.

REFERENCES

- [1] Pershytz R. Y., *Upravlyaemost' i upravlenie sudnom* [Dynamic control and handling of the ship]. L.: Sudostroenie, 1983.
- [2] Sobolev G. V., *Upravlyaemost' korablya i avtomatizatsiya sudovozhdeniya* [Ship handling and navigation automation]. L.: Sudostroenie, 1976.
- [3] Gofman A. D., *Propulsion and steering complex and ship maneuvering: handbook*. L.: Sudostroyenie, 1988.
- [4] Vasil'ev A. V., *Upravlyaemost' sudov* [Ship handling]. L.: Sudostroyenie, 1989.
- [5] Remez Yu. V., *Kachka korablya* [Ship rolling]. L.: Sudostroyenie, 1983.

- [6] Pavlenko V. G., *Khodkost' i upravlyaemost' sudov* [Navigability and controllability of ships]. Transport, 1991.
- [7] Miyusov M. V., *Modes of operation and automation of motor vessel propulsion unit with wind propulsors*. Odesa, Ukraine: OGMA; OKFA, 1996.
- [8] Kryvyi O. F., *Methods of mathematical modeling in navigation*. Odesa, Ukraine: ONMA, 2015. [in Ukrainian].
- [9] Ogawa A., Koyama T., Kijima K., "MMG report-I: on the mathematical model of ship manoeuvring," *Bull. Soc. Naval Archit. Jpn.*, no. 575, pp. 22–28, 1977. [in Japanese].
- [10] Ogawa A., Kasai H., "On the mathematical method of manoeuvring motion of ships," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 25, no. 292, pp. 306–319, 1978.
- [11] Matsumoto K., Suemitsu K., "The prediction of manoeuvring performances by captive model tests," *J. Kansai Soc. Naval Archit. Jpn.*, no. 176, pp. 11–22, 1980. [in Japanese].
- [12] Inoue S., Hirano M., Kijima K., Takashina J., "A practical calculation method of ship maneuvering motion," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 28, no. 325, pp. 207–222, 1981.
- [13] Inoue S., Hirano M., Kijima K., "Hydrodynamic derivatives on ship manoeuvring," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 28, no. 321, p. 67, 1981.
- [14] Yoshimura Y., Masumoto Y., "Hydrodynamic database and manoeuvring prediction method with medium high-speed merchant ships and fishing vessels," in *Proc. Int. Conf. Marine Simulation and Ship Manoeuvrability (MARSIM 2012)*, 2012, pp. 494–504
- [15] Yoshimura Y., Ma N., "Manoeuvring prediction of fishing vessels," in *Proc. MARSIM '03*, 2003, pp. RC-29-1–RS-29-10.
- [16] Yoshimura Y., Masumoto Y., "Hydrodynamic force database with medium high speed merchant ships including fishing vessels and investigation into a manoeuvring prediction method," *J. Japan Soc. Naval Architects Ocean Eng.*, vol. 14, pp. 63–73, 2011, doi: 10.2534/jjasnaoe.14.6
- [17] Yasukawa H., Yoshimura Y., "Introduction of MMG standard method for ship maneuvering predictions," *J. Mar. Sci. Technol.*, vol. 20, pp. 37–52, 2015, doi: 10.1007/s00773-014-0293-y
- [18] Yasukawa H., Sakuno R., "Application of the MMG method for the prediction of steady sailing condition and course stability of a ship under external disturbances," *J. Mar. Sci. Technol.*, vol. 25, pp. 196–220, 2020, doi: 10.1007/s00773-019-00641-4
- [19] Ayub F.A., Furukawa Y., "Comparison between cubic and quadratic models of hydrodynamic derivatives to the ship course stability index," *Int. J. Technol.*, vol. 15, no. 5, pp. 1502–1523, 2024, doi: 10.14716/ijtech.v15i5.7036
- [20] Kryvyi O. F., Miyusov M. V., "Mathematical model of movement of the vessel with auxiliary wind-propulsors," *Shipping & Navigation*, vol. 26, pp. 110–119, 2016.
- [21] Kryvyi O. F., Miyusov M. V., "Construction and analysis of mathematical models of hydrodynamic forces and moment on the ship's hull using multivariate regression analysis," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 15, no. 4, pp. 853–864, 2021, doi: 10.12716/1001.15.04.18
- [22] Kryvyi O. F., Miyusov M. V., "Mathematical model of hydrodynamic characteristics on the ship's hull for any drift angles," in *Advances in Marine Navigation and Safety of Sea*

- Transportation*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2019, pp. 111–117, doi: 10.1201/9780429341939
- [23] Kryvyi O., Miyusov M. V., Kryvyi M., "Construction and analysis of new mathematical models of the operation of ship propellers in different maneuvering modes," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 17, no. 1, pp. 853–864, 2023, doi: 10.12716/1001.17.01.09
- [24] Kryvyi O., Miyusov M. V., Kryvyi M., "Analysis of known and construction of new mathematical models of forces on a ship's rudder in an unbounded flow analysis," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 17, no. 4, pp. 831–839, 2023, doi: 10.12716/1001.17.04.09
- [25] Yoshimura Y., Nakamura M., Taniguchi T., and Yasukawa H., "Empirical formulas of hydrodynamic parameters for predicting ship maneuvering based on the MMG-model," *Ocean Eng.*, vol. 337, p. 121831, 2025, doi: 10.1016/j.oceaneng.2025.121831
- [26] Wendel K., "Hydrodynamische Massen und hydrodynamische Massenträgheitsmomente," *Jahrb. Schiffbautechn. Ges.*, vol. 44, pp. 207–255, 1950. [in German].
- [27] Korotkin A. I., *Added Masses of Ship Structures*. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2009, doi: 10.1007/978-1-4020-9432-3
- [28] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia of ships in steering motion," in *Proc. 1st Symp. Ship Manoeuvrability*, David Taylor Model Basin Rep. 1461, Washington, DC, USA, 1960.
- [29] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia for ship motions," *J. Zosen Kiokai*, no. 105, pp. 83–92, 1959. [in Japanese].
- [30] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia for ship motions: part 2. Added mass for the longitudinal motions," *J. Zosen Kiokai*, no. 106, pp. 59–62, 1960. [in Japanese].
- [31] Clarke D. et al., "The application of manoeuvring criteria in hull design using linear theory," in *Spring Meeting of the Royal Institution of Naval Architects*, 1982.
- [32] Hooft J.P., Pieffer J.B.M., "Manoeuvrability of frigates in waves," *Mar. Technol.*, vol. 25, 1988.
- [33] Zhou Z., Yan S., Feng W., "Maneuvering prediction of multiple-purpose cargo ships," *Ship Eng.*, vol. 6, pp. 21–36, 1983. [in Chinese].
- [34] Sadakane H., Toda Y., Lee Y.-S., "The simplified formulas to predict the coefficients of added mass and yaw added moment of inertia of a ship in shallow water," *J. Japan Inst. Navigation*, pp. 11–20, 2001.
- [35] Schneekluth H., and Bertram V., *Ship Design for Efficiency and Economy*, 2nd ed. Oxford, U.K.: Butterworth-Heinemann, 1998.
- [36] ITTC, "Appendix A: Manoeuvring in shallow and confined waters," in *Proc. 23rd Int. Towing Tank Conf.*, vol. 1, Venice, Italy, 2002, pp. 201–234.