

UDC 656.61.052.484

DOI: 10.31653/2306-5761.39.2026.25-38

DEPENDENCE OF THE ACCURACY OF DETERMINING THE COORDINATES OF A VESSEL ON THE METHOD OF THEIR CALCULATION

ЗАЛЕЖНІСТЬ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ СУДНА ВІД СПОСОБУ ЇХ РОЗРАХУНКУ

B. Aliksieichuk , graduate student

Б.М. Алексєйчук, аспірант

National University "Odesa Maritime Academy", Ukraine

Національний університет "Одеська Морська Академія", Україна

ABSTRACT

The study investigates how the accuracy of vessel position determination depends on the method used to estimate coordinates from measured navigation parameters. While the conventional approach assumes that random measurement errors follow a normal distribution and therefore justifies the use of the least squares method, recent statistical evidence indicates that navigation measurement errors often deviate from normality. In response, the study substantiates the applicability of mixed distributions of the first and second types for describing such errors. These distributions are theoretically justified by the structure of random error sample formation and are analytically convenient because their density and distribution functions can be expressed in elementary form. The hypothesis was tested through field observations collected during a six-month voyage. The results show that bearing and distance measurement errors observed over short time intervals of up to 8 hours are adequately described by the normal distribution. However, for longer observation intervals of one day or more, these errors follow mixed distribution laws, and the degree of deviation from normality increases with the duration of the measurement interval. To assess the effectiveness of vessel position estimates derived from redundant position lines and processed by the least squares method, simulation-based computer modeling was carried out for cases in which position line errors obeyed mixed distributions of the first and second types. The results demonstrated close agreement between theoretical and simulated efficiency estimates for all values of the essential parameter, confirming that the accuracy of vessel position determination depends on the selected coordinate estimation method.

Keywords: navigational safety, efficiency of the coordinates, lines of position, normal equations, excessive measurements.



Copyright© 2026 the Author(s).

This is an open access article under the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) license.

Published by the *National University "Odesa Maritime Academy"*.

Date received: 28-02-2026
Date accepted: 14-04-2026
Date published (online): 31-05-2026

Cite this article as: B. Aliksieichuk, "Dependence of the accuracy of determining the coordinates of a vessel on the method of their calculation," *Shipping & Navigation*, no. 39, pp. 25–38, 2026, doi: 10.31653/2306-5761.39.2026.25-38.

АНОТАЦІЯ

У статті досліджено залежність точності визначення місцеположення судна від методу оцінювання його координат за результатами навігаційних вимірювань. Традиційний підхід ґрунтується на припущенні, що випадкові похибки вимірювань підпорядковуються нормальному закону розподілу, що обумовлює широке застосування методу найменших квадратів. Водночас аналіз сучасних статистичних даних свідчить, що похибки навігаційних вимірювань нерідко відхиляються від нормального розподілу. У зв'язку з цим у роботі обґрунтовано доцільність опису таких похибок змішаними законами розподілу першого та другого типів. Теоретичне обґрунтування їх застосування базується на особливостях формування вибірок випадкових похибок, а перевагою цих законів є можливість аналітичного подання їх щільностей і функцій розподілу в елементарних функціях. Висунуту гіпотезу перевірено за результатами натурних спостережень, виконаних під час шестимісячного рейсу судна. Установлено, що похибки вимірювання пеленга та дистанції на коротких часових інтервалах тривалістю до 8 годин адекватно описуються нормальним законом розподілу. Натомість для триваліших інтервалів спостереження, зокрема від однієї доби і більше, ці похибки підпорядковуються змішаним законам розподілу, причому ступінь їх відхилення від нормального закону зростає зі збільшенням тривалості інтервалу вимірювань. Для оцінювання ефективності визначення координат судна за надлишковими лініями положення, обробленими методом найменших квадратів, виконано імітаційне комп'ютерне моделювання для випадків, коли похибки ліній положення підпорядковуються змішаним законам розподілу першого та другого типів. Отримані результати засвідчили близьку узгодженість теоретичних і модельних оцінок ефективності для всіх значень істотного параметра, що підтверджує залежність точності визначення місцеположення судна від обраного методу оцінювання координат.

Ключові слова: навігаційна безпека, ефективність визначення координат, лінії положення, нормальні рівняння, надлишкові вимірювання.

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими або практичними завданнями

Запобігання навігаційної аварійності потребує поточного контролю позиції судна із необхідною точністю, для забезпечення якої застосовуються надлишкові лінії положення (ЛП). Для визначення позиції судна слід по виміряним значенням навігаційних параметрів розрахувати його обсервовані координати з урахуванням закону розподілу похибок вимірювання. Так як вважається, що випадкові похибки вимірювання розподілені по нормальному закону, то обчислення координат проводиться методом найменших квадратів, який являється методом максимальної правдоподібності для нормально розподілених похибок, і забезпечує мінімальну дисперсію розрахованих координат.

Однак останнім часом на базі аналізу статистичних матеріалів було виявлено, що часто

випадкові похибки навігаційних вимірювань мають розподіл відмінний від нормального закону, на що наголошується в ряді опублікованих робіт. Тому використання методу найменших квадратів для розрахунку обсервованих координат судна по надмірним ЛП, похибки яких мають розподіл вірогідностей відмінний від нормального закону, являється їх квазіправдоподібною оцінкою, що не забезпечує можливу мінімальну дисперсію векторіальної похибки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і виділення невирішених раніше частин загальної проблеми

Проблемі забезпечення точності судноводіння присвячено багато робіт по тематиці безпеки мореплавання. Статистичні дані похибок вимірювань навігаційних параметрів, які отримані шляхом натурних спостережень

приведено у роботах [1,2], аналіз яких показав, що похибки часто розподілені не по нормальному закону. Причому показано відмінності їх розподілу від нього.

У статті [3] приведено аналіз сигналу Galileo E1 та вплив на нього різних типів збурень. Проводилося моделювання хаотичних імпульсних збурень, білого шуму та інших збурень і виявлено залежність сигналу E1 від цих чинників. Були одержані спектральні структури цих збурень, які були включені в сигнал E1 з використанням Matlab. В роботі зазначено, що фільтром Калмана проводилась фільтрація білого шуму з сигналу E1. Відмічається, що результатами роботи можуть скористатися при розробці приймачів та технічних пристроїв підвищеної надійності, здатним ігнорувати такі збурення.

У роботі [4] для вирішення задачі визначення місця судна в разі наявності надмірних вимірів запропоновано ортогональне розкладання щільності розподілу похибок навігаційних вимірів, а в роботі [5] приведено результати аналізу даних по точності визначення місця судна супутниковою навігаційною системою, які спростовують припущення про розподіл похибок вимірювання широти та довготи за нормальним законом, чим зумовлюється необхідність використання альтернативних законів розподілу.

Змішаним законам розподілу двох типів та їх використанню у разі наявності випадкових навігаційних похибок вимірювань присвячена робота [6], а, як показано в роботі [7], при використанні РЛС похибки вимірювань відстаней та пеленгів часто розподілені за змішаними законами першого та другого типу, проте відсутній аналіз, як впливає на точність визначення місця судна.

Аналізу запропонованої моделі оцінки відповідності точності визначення координат глобальною супутниковою навігаційною системою (GNSS) існуючим вимогам присвячена робота [8], в якій також розглянуто модель стосовно накопичення достатнього об'єму спостережень похибок положення об'єкту, що породжуються різними типами зовнішніх збурень і мають вплив на точність визначення

позиції. Розглянуто пропоновану модель для полярного регіону з використанням вимірних псевдодальностей GNSS на опорній станції мережі Міжнародної служби GNSS Iqaluit в Канаді.

У роботах [9,10] показана можливість використання узагальненого закону розподілу Пуассона в разі залежних випадкових величин вимірювань.

Точність координат визначення місця судна, розрахованих методом найменших квадратів, у разі наявності надмірних ліній положення досліджено у роботі [11]. Також формалізовано вплив істотних факторів на точність координат визначення місця судна.

Розробку моделі руху літального апарату в геоцентричній системі координат (ECEF – Earth-Centered) розглянуто у роботі [12], яку можна використати для дослідження точності радіонавігаційних систем. Основою для розробки цієї моделі явився математичний опис руху літального об'єкта у геоцентричній системі координат.

В статті також викладена процедура комп'ютерного моделювання програмним продуктом Matlab руху літального апарату.

Геометричний фактор, що визначається кількістю та взаємним розташуванням ЛП, розглянуто в роботі [13] та показано, що від нього залежить значення дисперсії обсервації. Приведено аналітичні вирази для дисперсії обсервації в разі розподілу похибок вимірювання навігаційних параметрів за нормальним законом та за змішаними законами першого і другого типу. Також проведено аналіз можливості покращання точності визначення місця судна використанням додаткових ліній положення та мінімізацією геометричного фактору.

Нова концепція збору батиметричних даних (система CSB) розглянута в роботі [14], яка передбачає процедуру збирання та використання інформації про метеорологічні дані, які у морі отримані дослідницькими суднами, оснащеними відповідними приладами. В роботі також вказано на відмінності між гідрографічною зйомкою та CSB та приводиться

аналіз чинників, які впливають на безпеку судноплавства.

В роботах [15,16] показано, що в разі розподілу похибок вимірювань за законом відмінним від нормального, розрахунок обсервованих координат судна методом найменших квадратів не забезпечує їх ефективні оцінки і відбувається втрата їх точності.

В роботі [17] приведено опис випадкової фази сигналу E6 супутникової навігаційної системи Galileo, в якій було представлено математичні моделі її вимірювальних сигналів, використовуючи наявну інформацію. Блок-схема генерації таких сигналів також представлена в статті і розроблено фазову модель E6 сигналу системи Galileo.

Результати проведеного моделювання показали, що сигнал E6 характеризується нестабільною частотою, яка являється стаціонарним процесом. Результати моделювання також показали, що ефект Доплера має значний вплив на випадкову фазу сигналу E6 і впливає на точність навігаційних вимірювань. Результати проведеного моделювання випадкової фази сигналу E6 можуть бути використані для оцінки стійкості системи Galileo до збурень.

Результати дослідження відносно урахування розрахованих поправок станції в районі порту Щецін при використанні системи DGPS приведено в роботі [18], які підтвердили доцільність їх урахування при визначенні позиції судна. Показано, що одержані результати забезпечують більш ефективне використання системи DGPS при плаванні суден в районі порту Щецін.

Як показано у роботі [19], стохастичні спостереження в основному базуються на знаннях щодо їхньої поведінки. Сучасні комп'ютерні програми на етапі навчання використовують необроблені дані, які досліджуються з метою визначення параметрів, необхідних для обчислення схеми логічного висновку.

Під час початкової обробки даних проводиться виявлення умовних залежностей. Принципами нечітких систем визначається модифікована ступінчаста структура, представлена локально ін'єктивними функціями густини, які практично являються діаграмами

умовних залежностей з ідентифікованою невизначеністю. Це забезпечує формування базових вірогідностей призначення. З початкових даних знаходяться показники невизначеності, вірогідності та правдоподібності.

Як показано в роботі [20], під час шторму існують навігаційні обмеження для входу судна в гавань, яка знаходиться на відкритому морському побережжі, по причині того, що для судна, яке входить в гавань, в умовах шторму виникає небезпека зіткнення з хвилеломом через його небезпечні зміщення відносно програмної траєкторії руху. В роботі запропоновано індекси оцінки безпеки входу в гавань, які базуються на проведених натурних дослідженнях траєкторій руху судна.

У статті [21] представлено метод навігації за сліпим розрахунком, призначений для безпілотних літальних апаратів (БПЛА), який дозволяє визначати місцезнаходження за обмеженого доступу до сигналу GNSS. Метод базується на аналізі даних інерціальних вимірювальних блоків (IMU) та математичних алгоритмів, що дозволяють здійснювати точний моніторинг траєкторій БПЛА. У дослідженні викладено теоретичні основи навігації за сліпим розрахунком, виведення ключових формул та результати імітаційних випробувань методу на основі реальних журналів даних інерціальних датчиків. Випробування продемонстрували багатообіцяючу ефективність, підкресливши його потенціал у військовому та цивільному застосуванні. Метод може служити доповненням до традиційних навігаційних систем.

Нові супутники на низькій навколосемній орбіті (LEO), як відзначається в роботі [22] пропонують нові можливості для покращення навігації. У цій статті досліджується потенціал сигналів ортогонального частотного мультиплексування (OFDM) для супутникової навігації LEO, зосереджуючись на проблемах, що виникають через зміщення несучої частоти (CFO) в середовищах з низьким співвідношенням сигнал/шум (SNR). Всебічно аналізуються навігаційні властивості сигналів OFDM, оцінюючи два кандидати на послідовності синхронізації (SS) на їх стійкість до

CFO. Результати показують, що m -послідовність ефективно зменшує цілочисельні CFO, мінімально впливаючи на оцінку дальності приймача за наявності дробових CFO. Крім того, представлено архітектуру виявлення SS, яка інтегрує диференціальне когерентне накопичення (DCA) з тестом майже оптимального відношення правдоподібності (NOLRT). Цей приймач LEO на основі DCA-NOLRT підвищує надійність та чутливість виявлення, ефективно керуючи залишковими дробовими CFO та покращуючи ймовірність виявлення в сценаріях з низьким співвідношенням сигнал/шум. Числове моделювання та наземні експерименти підтверджують здатність запропонованої структури мінімізувати помилки дальності, викликані CFO, навіть у складних умовах навігаційних сценаріїв LEO.

В роботі [23] відмічається, що глобальні навігаційні супутникові системи (GNSS) підтримують застосування в авіації, що забезпечують безпеку життя, включаючи точну навігацію під час заходу на посадку та посадки літаків. Однак, перешкоди сигналів поблизу аеропортів можуть серйозно погіршити експлуатаційну доступність та цілісність, а традиційні методи виявлення перешкод, як правило, є дорогими та трудомісткими для реалізації на великих територіях. У цій статті ми розробляємо новий алгоритм, який використовує звіти автоматичного залежного спостереження та трансляції (ADS-B), які регулярно передаються літаками та є загальнодоступними, для оцінки потужності перешкод та географічного розташування джерела перешкод GNSS. Потім ми тестуємо алгоритм на записаних передачах ADS-B під час події перешкод 2022 року в Міжнародному аеропорту Денвера (KDEN). Результати показують, що алгоритм успішно виявляє перешкоди та локалізує джерело в межах похибки 0,1 градуса за широтою та довготою. На відміну від попередніх методів виявлення перешкод, наш алгоритм також кількісно визначає невизначеність за допомогою меж помилок та теплових карт ймовірностей, що підвищує надійність та інтерпретованість результатів. Загалом,

цей алгоритм може допомогти звужити область пошуку на землі та забезпечити фізичне вимкнення джерел перешкод GNSS.

Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Метою роботи являється дослідження залежності точності визначення позиції судна від способу розрахунку її координат.

Виклад матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів

Для визначення обсервованого місця судна використовується декілька (більше двох) ЛП, які через похибки перенесень не перетинаються в одній спільній позиції. Тому обсервоване місце судна розраховується аналітично і має випадкове відхилення від його істинного місця, яке характеризується векторіальною похибкою. Дисперсія модуля векторіальної похибки визначає точність обсервації судна. Тому спосіб вибору обсервованої точки по одержаним ЛП, тобто використаний метод аналітичного розрахунку координат, враховує аналітичний вигляд щільності закону розподілу похибок ЛП і визначає дисперсію модуля векторіальної похибки. Якщо дійсний закон розподілу похибок ЛП та закон розподілу, який використано для розрахунку обсервованих координат судна, однакові, то таких спосіб розрахунку називається методом максимальної правдоподібності, при якому досягається мінімальна дисперсія модуля векторіальної похибки. В разі коли ці закони розподілу відрізняються, то дисперсія модуля векторіальної похибки більша можливого мінімального значення, а така оцінка точності називається квазіправдоподібною.

Як показано в роботах [15,10], відношення мінімально можливої дисперсії обсервації до дисперсії при квазіправдоподібній оцінці являється ефективністю (в статистичному сенсі) розрахованих координат. Очевидно, ефективність координат, розрахованих методом максимальної правдоподібності становить 1, а для квазіправдоподібних оцінок її значення

менше 1, що веде до втрати точності визначення координат.

Розглянемо питання квазіправдоподібних оцінок визначення координат судна більш детально. Модель нормального закону розподілу випадкових похибок була запропонована Карлом Фрідріхом Гауссом. Нормальний закон розподілу, який також називають законом Гауса, займає центральне місце в теорії вірогідності, - це закон розподілу, що найчастіше зустрічається на практиці. Головна особливість цього закону полягає у тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу за деяких типових умов.

У теорії вірогідності доведено, що сума досить великого числа незалежних випадкових величин, підлеглих яким завгодно законам розподілу, приблизно підкоряється нормальному закону, і це виконується тим точніше, ніж більша кількість випадкових величин сумується. Так, похибки вимірювання навігаційних параметрів можуть бути представлені як сума великого числа порівняно малих доданків – елементарних похибок, кожна з яких викликана дією окремої причини, незалежної від інших.

Яким би законам розподілу не були підлеглі окремі елементарні похибки, особливості цих розподілів в сумі великого числа доданків нівелюються, і сума виявляється підлегла закону, близьку до нормального. Основне обмеження, що накладається на підсумовуванні похибки, полягає в тому, щоб вони всі виконували в загальній сумі відносно малу роль.

Особливість нормального закону розподілу полягає в тому, що його параметрами являється математичне очікування та дисперсія, а також те, що він являється стійким, тобто сума декількох випадкових величин, що розподілені по нормальному закону також мають нормальний розподіл, - аналітичний вираз щільності розподілу залишається незмінним.

Так як вважається, що випадкові похибки вимірювання розподілені по нормальному закону, то обчислення координат проводиться методом найменших квадратів, який явля-

ється методом максимальної правдоподібності для нормально розподілених похибок, і забезпечує мінімальну дисперсію розрахованих координат.

Для визначення закону розподілу похибок та його параметрів необхідно зібрати значний статистичний матеріал у вигляді представницької вибірки, що потребує значного терміну, протягом якого умови спостереження змінюються. Тому вибірка являється неоднорідною, - вона містить похибки з різним значенням дисперсій.

Таким чином, значний термін формування вибірки випадкових похибок являється вирішальною підставою стверджувати змішаний характер розподілу похибок вибірки. З урахуванням цих обставин в роботі [24] для формалізації розподілу похибок навігаційних вимірювань запропоновано модель змішаних розподілів, яка базується на двох наступних передумовах:

1. Похибки навігаційних вимірювань при незмінних умовах спостережень мають нормальний закон розподілу з нульовим математичним очікуванням, щільність якого виражається наступним чином:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right],$$

де σ – середнє квадратичне відхилення.

2. Варіації умов спостереження ведуть до випадкових змін с.к.в. σ нормального розподілу. Причому σ , як випадкова величина, має щільність розподілу $\varphi(\sigma)$, яка повинна задовольняє умовам:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \varphi(\sigma) = 0, \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \varphi(\sigma) = 0 \text{ і } \sigma > 0$$

В цьому випадку щільність змішаного розподілу являється щільністю розподілу похибок навігаційних вимірювань і має вигляд:

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) d\sigma. \quad (1)$$

Принциповим питанням являється вибір щільності розподілу $\varphi(\sigma)$, яка забезпечила б явний вигляд щільності розподілу похибок навігаційних вимірювань $f(\xi)$.

В роботі [2] показано, що щільність змішаного розподілу в явному вигляді існує лише для закону Лапласа, коли в якості щільності $\varphi(\sigma)$ вибрано закон розподілу Релея. Але закон Лапласа не має безперервної першої похідної, що унеможливило його використання в якості закону розподілу вірогідностей похибки навігаційних вимірювань.

Згодом, використовуючи модельні гіпотези у роботі [10], запропоновано в якості щільності $\varphi(\sigma)$ вибрати два закони розподілу з щільністю $\varphi_1(\sigma)$ і $\varphi_2(\sigma)$, які дозволяють одержати змішану щільність в явному вигляді і мають наступний вигляд:

$$\varphi_1(\sigma) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\alpha}{\sigma^2}\right);$$

$$\varphi_2(\sigma) = 2\alpha \frac{1}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{\alpha}{\sigma^2}\right).$$

Підставляючи дану щільність у вираз (1), після інтегрування одержимо базову щільність змішаного розподілу відповідно першого $f_{b1}(x)$ (Коші) і другого $f_{b2}(x)$ (Пірсона) типу:

$$f_{b1}(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(x^2/2 + \alpha)};$$

$$f_{b2}(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}2} \frac{1}{(x^2/2 + \alpha)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

З двох приведених щільностей одержано множину щільностей змішаного закону розподілу вірогідностей навігаційних похибок, що виражаються в явному вигляді:

$$f_1(x) = \frac{A_{m1}}{(x^2/2 + \lambda)^{m+1}}, \quad (m \leq 6) \quad (3)$$

де m, λ - відповідно істотний цілочисловий та масштабний параметри;

$$A_{m1} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{\sqrt{2\pi}(2m)!} \lambda^{m+1/2} - \text{нормуючий}$$

множник.

$$f_2(x) = \frac{A_{m2}}{(x^2/2 + \lambda)^{m+3/2}}, \quad (m \leq 5) \quad (4)$$

$$\text{де } A_{m2} = \frac{(2m+1)! \lambda^{m+1}}{\sqrt{2}2^{2m+1}(m!)^2} - \text{нормуючий}$$

множник.

Вираз (3) є щільністю розподілу вірогідності змішаного закону першого типу, а вираз (4) - змішаного закону другого типу.

Для перевірки коректності гіпотези про змішаний розподіл вірогідностей похибки навігаційних вимірювань, щільність яких виражається формулами (3) і (4) потрібно впевнитися, що похибки вибірки, яка сформована при незмінних умовах спостережень, тобто за незначний проміжок часу, мають нормальний закон розподілу, чим буде підтверджена справедливність першої вимоги моделі змішаного закону розподілу. Також потрібно сформулювати вибірку похибок виміру навігаційного параметру на значному проміжку часу, під час якого умови спостережень зазнають змін, і перевірити правомірність розподілу похибки по змішаному закону.

Для рішення поставленого завдання під час шестимісячного рейсу судна автором проводились експериментальні дослідження в умовах натурних спостережень.

Формування початкових вибірок похибок вимірювання навігаційних параметрів проводилось вимірюванням навігаційних параметрів кількістю більше 100 вимірювань. Вимірювання навігаційних параметрів здійснювалися в трьох портах на стоянці судна, причому за допомогою РЛС вимірювалися дистанція і пеленг на нерухомий орієнтир. Було проведено три серії формування вибірок, в яких похибки вимірювань накопичувалися протягом різних термінів: близько 8 годин

(150 вимірювань), протягом доби (210 вимірювань) і протягом двох діб (250 вимірювань). В кожному порту були одержані 2 серії вимірювань навігаційних параметрів, а за час рейсу - 6 серій вимірювань.

Для кожної серії вимірювань визначали середнє значення навігаційного параметру і розраховували значення похибки вимірювань, які в сукупності склали вибірку похибок, що виникають при вимірюванні вибраного параметру. Стандартною процедурою розраховувалися дисперсія і середнє квадратичне відхилення похибки кожної вибірки.

Надалі по кожній вибірці будувалась гістограма і розглядалися статистичні гіпотези змішаних законів розподілу першого і другого типу, а також нормальний закон.

Для кожної вибірки були розраховані значення критерію згоди χ^2 – Пірсона з розглянутими законами розподілу вірогідності похибок, і законом розподілу вибирається той, який має мінімальний критерій згоди χ^2 – Пірсона.

Аналіз одержаних результатів натурних спостережень показав, що похибки вимірювання навігаційних параметрів (пеленга і дистанції), одержані на обмеженому інтервалі часу (8 годин), підкоряються нормальному закону розподілу вірогідності. Похибки вимірювання

пеленга і дистанції на більшому інтервалі часу (доба і більше) підлегли змішаним законам розподілу, ступінь відмінності яких від нормального закону пропорційний інтервалу часу вимірювання серії значень навігаційного параметру.

В якості прикладу на рис. 1 показані гістограма вибірки похибок вимірювання дистанції і крива щільності розподілу закону Гауса для серії терміном 8 годин. Зліва на рисунку приведені значення критерію згоди χ^2 – Пірсона для кожної щільності, причому для нормального закону значення критерію становить 0,0065, в той час, як для змішаних законів мінімальне значення критерію дорівнює 13,386.

На рис. 2 представлені гістограма вибірки похибок вимірювання дистанції і крива щільності розподілу змішаного закону першого типу з істотним параметром рівним 2 для серії терміном 24 години. Критерій згоди χ^2 – Пірсона для цієї щільності становить 0,0116, в той час як для нормального закону його значення дорівнює 7,6602.

Таким чином, вважаючи, що накопичення похибок в їх вибірці до необхідним розмірів потребує значного терміну, можна стверджувати, що похибкам навігаційних вимірювань притаманний розподіл по змішаним законам.

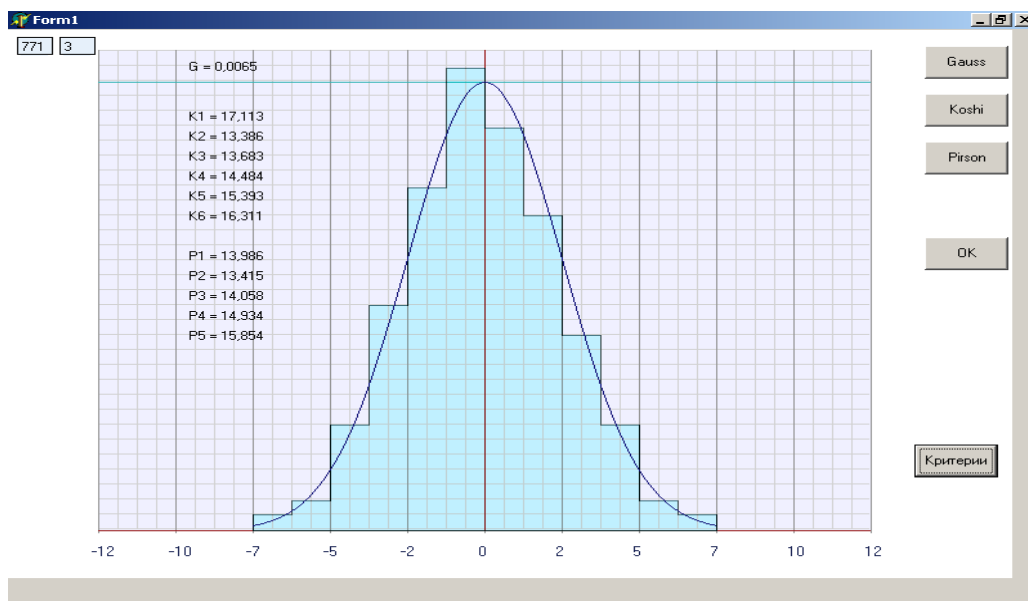


Рис. 1. Гістограма вибірки похибок вимірювання дистанції (8 годин)

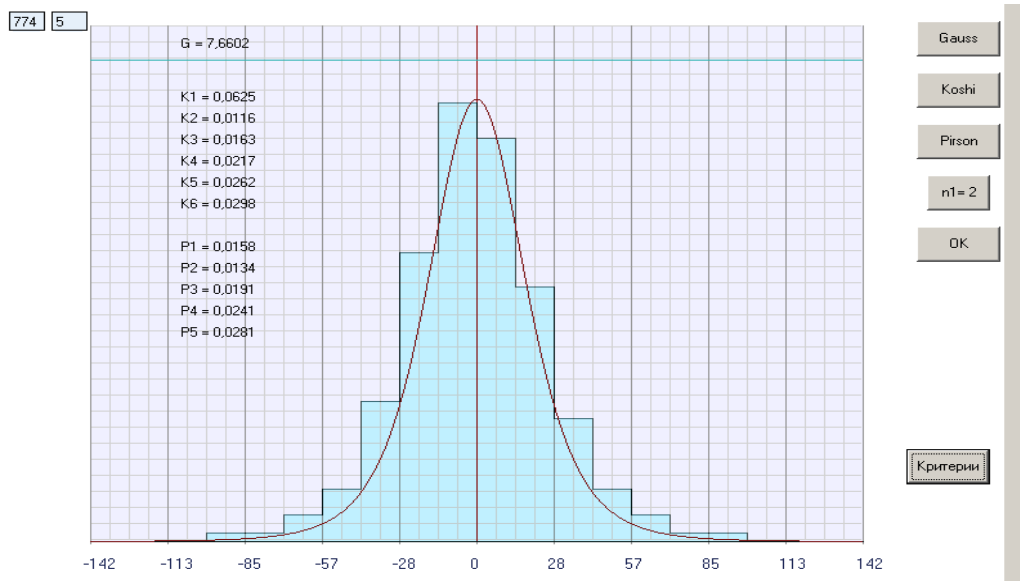


Рис. 2. Гістограма вибірки похибок вимірювання дистанції (доба)

У цьому разі, коли похибки навігаційних вимірювань мають змішані закони розподілу, а розрахунок координат проводиться методом найменших квадратів (МНК), то, як показано в роботі [10], ефективність визначення координат менша 1, а її значення розраховується виразами:

$$e_1 = 1 - \frac{3}{2m^2 + 3m + 1}, \quad e_2 = 1 - \frac{3}{2m^2 + 5m + 3}, \quad (5)$$

де e_1 і e_2 - ефективність для змішаних законів розподілу відповідно першого і другого типу.

В табл. 1 приведені значення ефективності e_1 в залежності від істотного параметра m .

Таблиця 1. Ефективність змішаного розподілу першого типу

m	1	2	3	4	5	6
e_1	0,5	0,8	0,893	0,934	0,955	0,968

Аналіз таблиці показує, що ефективність e_1 при $m=1$ свідчить про втрату точності визначення позиції судна наполовину відносно точності при розрахунку координат методом максимальної правдоподібності. Для значень $m \geq 6$ змішаний закон першого типу практично збігається з нормальним законом.

Значення ефективності e_2 в залежності від істотного параметра m приведені в табл. 2.

Таблиця 2. Значення ефективності e змішаного розподілу другого типу

m	1	2	3	4	5
e_2	0,7	0,857	0,917	0,945	0,962

При значенні $m=1$ точність обсервації знижується на третину відносно максимально можливої, а в разі $m \geq 5$ ефективність e_2 наближається до 1.

Для оцінки ефективності обсервованих координат, отриманих при надлишкових ЛП і розрахованих методом найменших квадратів автором проводилося імітаційне комп'ютерне моделювання. Причому розглядалися випадки, коли похибки ліній положення підпорядковувалися змішаним законам першого і другого типу.

Імітаційне моделювання проводилося наступним чином. Спочатку за обраним законом розподілу генерувалася вибірка похибок ЛП, що складається з 1000 членів. Розрахунок координат кожної обсервованої точки проводився по 8 лініях положення відносно істиного місця судна. Формування 125 обсервованих точок повторювалося чотири рази, а їх отримані

координати зберігалися, в результаті чого накопичувалася вибірка координат векторіальної похибки чисельністю 500 значень похибки. За допомогою отриманої вибірки розраховувалися математичні сподівання M_X , M_Y і дисперсії D_X , D_Y проєкцій X і Y векторіальної похибки. Імітаційною комп'ютерною програмою передбачено графічне відображення положень обсервованих точок відносно математичного сподівання, що дозволяє зробити візуальну оцінку їх розсіювання.

У комп'ютерній програмі імітаційного моделювання передбачено розрахунок обсервованих координат як методом найменших квадратів, так і методом максимальної правдоподібності.

В якості прикладу на рис. 3 наведено порівняльну характеристику розсіювання обсервованих позицій, отриманих МНК і ММП при змішаному законі розподілу похибок першого типу з істотним параметром $m=1$. Порівняльна характеристика розсіювання обсервованих позицій, отриманих МНК і ММП в разі розподілу похибок по змішаному закону

другого типу з істотним параметром $m=1$ для одних і тих же ЛП представлена на рис. 4. З указаних рисунків видно, що розсіювання обсервацій в їх правій половині, яке одержане ММП, значно менше, ніж у лівій, розрахованій МНК. Це свідчить про те, що дисперсія векторіальної похибки при застосуванні ММП менша, ніж при розрахунку координат МНК.

В результаті імітаційного моделювання були одержані значення ефективності $e_{IM}^{(1)}$ розрахунку координат для змішаного закону розподілу першого типу і їх порівняння із теоретично розрахованою $e_T^{(1)}$ з допомогою виразу (5), які приведені в табл. 3.

Із таблиці видно, що відсоткова розбіжність $\delta e^{(1)}\%$ між ефективностями $e_T^{(1)}$ і $e_{IM}^{(1)}$ не перевищує 20,5%, що свідчить про коректність виразу (5) і втрати точності при застосуванні МНК для розрахунку координат в разі розподілу похибок ЛП за змішаним законом першого типу.

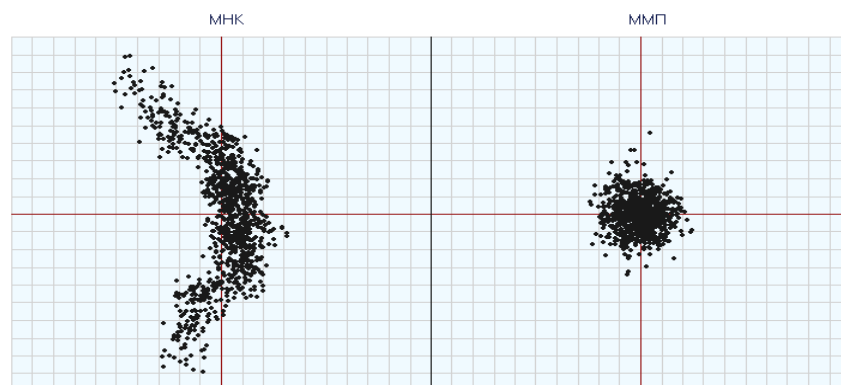


Рис. 3. Характеристики розсіювання обсервацій при $m=1$ (1 тип)

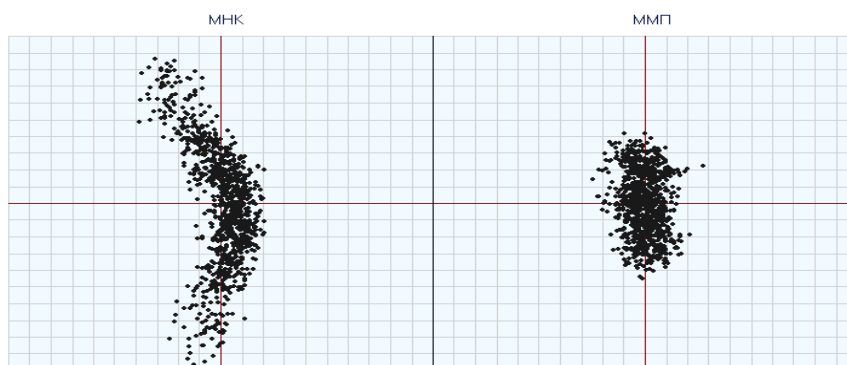


Рис. 4. Характеристика розсіювання позицій при $m=1$ (2 тип)

Таблиця 3. Ефективність змішаного закону розподілу першого типу

m	1	2	3	4	5	6
$e_T^{(1)}$	0,5	0,8	0,893	0,934	0,955	0,968
$e_{IM}^{(1)}$	0,507	0,636	0,710	0,792	0,8	0,888
$\delta e^{(1)}$ %	14	20,5	20,5	15,2	16,2	8

Аналогічні результати імітаційного моделювання одержанні для змішаного закону розподілу другого типу, які приведені в табл. 4, аналіз якої показує, що відсоткова розбіжність $\delta e^{(1)}$ % між ефективностями $e_T^{(2)}$ і $e_{IM}^{(2)}$ не перевищує 22,0%.

Таким чином, одержана збіжність між теоретичними та змодельованими значеннями ефективностей за всіх значень істотного параметру для змішаних законів розподілу першого і другого типу свідчить про залежність точності визначення позиції судна від вибраного методу розрахунку координат по вимірним значенням навігаційних параметрів.

Таблиця 4. Ефективність змішаного закону розподілу другого типу

m	1	2	3	4	5
$e_T^{(2)}$	0,7	0,857	0,917	0,945	0,962
$e_{IM}^{(2)}$	0,671	0,668	0,751	0,829	0,870
$\delta e^{(2)}$ %	4,1	22,0	18,1	12,3	9,6

Висновки і перспектива подальшої роботи по даному напрямку

1. Підтверджена можливість розподілу похибок навігаційних вимірювань за змішаними законами, про що свідчать експериментальні матеріали, одержані в натурних спостереженнях.

2. Одержані аналітичні вирази для розрахунку ефективності обсервованих координат судна в разі надмірних вимірів, коли похибки ЛП мають розподіл за змішаними законами, які підтвержені імітаційним комп'ютерним моделюванням.

3. Показана залежність точності визначення координат судна від способу їх розрахунку і одержані її кількісні характеристики.

Надалі доцільне дослідження питання ефективності квазіправдоподібних оцінок обсервованих координат в разі, коли похибки навігаційних вимірювань мають нормальний закон розподілу, а їх розрахунок проводиться ММП для змішаних законів розподілу похибок.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] D. A. Hsu, "An analysis of error distribution in navigation", The Journal of Navigation, Vol. 32, no. 3. pp. 426 - 429, 2003.
- [2] В.Т. Кондрашихін, Визначення місця судна. Транспорт, 1989.
- [3] M. Džunda, S. Čikovský and L. Melniková. "Model of the Signal of the Galileo Satellite Navigation System", TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, vol. 17, no. 1, doi: 10.12716/1001.17.01.04, pp. 51-59, 2023.
- [4] I. Vorokhobin, O. Haichenia, V. Sikirin and I. Fusar, "Application of Orthogonal Decomposition of Mixed Laws' Density Distribution of Navigational Measurement Errors", In the 25th International Scientific Conference Transport Means 2021 Sustainability: Research and Solutions, 06.10, 2021, pp. 477-481.
- [5] Luis Monteiro, "What is the accuracy of DGPS?", J. Navig. vol. 58, no. 2, pp. 207-225, 2005.
- [6] I. Vorokhobin, O. Haichenia, V. Sikirin and V. Severin, "Determination of the Law of Probability Distribution of Navigation Measurements", In the 24th International Scientific Conference Transport Means 2020 Sustainability: Research and Solutions, 30.09,2020, pp. 707-711.
- [7] D. Astaykin, A. Golikov, A. Bondarenko, O. Bulgakov, "The Effectiveness of Ship's Position Using the Laws of Distribution of Errors in Navigation Measurements", In

- the 24th International Scientific Conference Transport Means 2020 Sustainability: Research and Solutions, 30.09,2020, pp. 662-666.
- [8] E. Malić, N. Sikirica, D.Špoljar and R. Filjar. "A Method and a Model for Risk Assessment of GNSS Utilisation with a Proof-of-Principle Demonstration for Polar GNSS Maritime Applications", *TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation*, vol. 17, no. 1, doi:10.12716/ 1001.17.01.03, pp. 43-50, 2023.
- [9] В.Е. Сікірін, "Опис навігаційних похибок за допомогою узагальненого розподілу Пуассона", *Судноводіння*, Вип. 26, сс. 152 – 156., 2016.
- [10] Д.В Астайкін, В.Є Сікірін, І.І Ворохо-бін та Б.М Олексійчук, *Оцінка точності координат судна при надмірних вимірах*. Saarbrucken, Deutschland:: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017.
- [11] І.О. Бурмака, Б.М. Алексійчук, "Точність координат визначення місця судна, розрахованих методом найменших квадратів, у разі надмірних вимірів", *Судноводіння*, Вип. 35, DOI: 10.31653/2306-5761.35.2023.10-21, С. 10-21, 2023.
- [12] M. Džunda. "Model of the Motion of a Navigation Object in a Geocentric Coordinate System", *TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation*, vol. 15, no. 4, doi:10.12716/ 1001.15.04.10, pp. 791-794, 2021.
- [13] Б.М. Алексійчук, "Залежність точності обсервації від суттєвих чинників та шляхи її покращання", *Судноводіння*, Вип. 36, DOI: 10.31653/2306-5761.36.2024.10-19, С. 10-19, 2024.
- [14] I. Pavić, J. Mišković, J. Kasum and D. Alujević. "Analysis of Crowdsourced Bathymetry Concept and It's Potential Implications on Safety of Navigation", *TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation*, vol. 14, no. 3, doi:10.12716/1001.14.03.21, pp. 681-686, 2020.
- [15] В.М. Мудров, В.Л. Кушко, *Методи обробки вимірів*, Радянське радіо, 1976.
- [16] В.В. Степаненко. "Ефективність оцінки параметрів ситуації небезпечного зближення суден", *Судноводіння*, Вип. 2, С. 201 – 209, 2000.
- [17] M. Džunda, S. Čikovský and L. Melniková. "Model of the Random Phase of Signal E6 of the Galileo Satellite Navigation System", *TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation*, vol. 17, no. 1, doi:10.12716/ 1001.17.01.05, pp. 61-68, 2023.
- [18] R. Bober, P. Grodzicki, Z. Kozłowski and A. Wolski, "The DGPS system improve safety of navigation within the port of Szczecin", In the 12 International Conference on Integrated Navigation Systems, 23.05, 2005, pp. 192-194.
- [19] W. Filipowicz. "Position Fixing and Uncertainty", *TransNav, the International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*, vol. 17, no. 4, doi:10.12716/ 1001.17.04.15, pp. 887-893, 2023.
- [20] Kubo Masayoshi, Sakakibara Shigeki, Hasegawa Yoshimi and Nagaoka Tadao. "Research of method of calculation of probability of collision of ship with the rectangular bull of bridge at tearing down by wind and flow", *Jap. Inst. Navig.* no. 104, pp. 225-233, 2001.
- [21] B. Szykuła, J. Furtak. "Dead Reckoning Method for an Unmanned Aerial Vehicle in Conditions of Limited GPS Signal", *TransNav, the International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*, Vol. 19, No. 4, doi:10.12716/1001.19.04.01, pp. 1063-1068, 2025

- [22] Y. He, B.Xu. "Enhancing ranging precision in OFDM-based LEO navigation: Signal design and receiver implementation". NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation, January 2026, 73 navi.741 DOI: <https://doi.org/10.33012/navi.741>.
- [23] Zixi Liu, Sherman Lo, Juan Blanch, Yu-Hsuan Chen and Todd Walter. "Locating GNSS Interference Sources using ADS-B with Non-linear Least Squares ", NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation, September 2025, 72(3) navi.716, DOI: <https://doi.org/10.33012/navi.716>.
- [24] А.І.Сорокін, Гідрографічні дослідження Світового океану: Гідрометіздат, 1980.
- REFERENCES**
- [1] D. A. Hsu, "An analysis of error distribution in navigation", The Journal of Navigation, Vol. 32, no. 3. pp. 426 - 429, 2003.
- [2] V.T. Kondrashikhin, Location of ship. Transport, 1989.
- [3] M. Džunda, S. Čikovský and L. Melniková. "Model of the Signal of the Galileo Satellite Navigation System", TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, vol. 17, no. 1, doi: 10.12716/1001.17.01.04, pp. 51-59, 2023.
- [4] I. Vorokhobin, O. Haichenia, V. Sikirin and I. Fusar, "Application of Orthogonal Decomposition of Mixed Laws' Density Distribution of Navigational Measurement Errors", In the 25th International Scientific Conference Transport Means 2021 Sustainability: Research and Solutions, 06.10, 2021, pp. 477-481.
- [5] Luis Monteiro, "What is the accuracy of DGPS?", J. Navig. vol. 58, no. 2, pp. 207-225, 2005.
- [6] I. Vorokhobin, O. Haichenia, V. Sikirin and V. Severin, "Determination of the Law of Probability Distribution of Navigation Measurements", In the 24th International Scientific Conference Transport Means 2020 Sustainability: Research and Solutions, 30.09,2020, pp. 707-711.
- [7] D. Astaykin, A. Golikov, A. Bondarenko, O. Bulgakov, "The Effectiveness of Ship's Position Using the Laws of Distribution of Errors in Navigation Measurements", In the 24th International Scientific Conference Transport Means 2020 Sustainability: Research and Solutions, 30.09,2020, pp. 662-666.
- [8] E. Malić, N. Sikirica, D.Špoljar and R. Filjar. "A Method and a Model for Risk Assessment of GNSS Utilisation with a Proof-of-Principle Demonstration for Polar GNSS Maritime Applications", TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, vol. 17, no. 1, doi:10.12716/1001.17.01.03, pp. 43-50, 2023.
- [9] V.E. Sikirin, "Description of navigation errors by the generalized distributing of Puasson", Shipping & Navigation, Issue. 26. - pp. 152 – 156, 2016.
- [10] D.V. Astayrin., V.E. Sikirin, I.I. Vorokhobin and B.M. Alekseychuk, Estimation of exactness of coordinates of ship at the surplus measuring. Saarbrucken, Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017.
- [11] I.O. Burmaka, B.M. Alekseychuk "Accuracy of the coordinates of the ship's designated place, calculated by the least squares method, in the times of overworldly worlds" Shipping & Navigation, Issue 35, DOI: 10.31653/2306-5761.35.2023.10-21, pp. 10-21, 2023.
- [12] M. Džunda. "Model of the Motion of a Navigation Object in a Geocentric Coordinate System", TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation, vol. 15, no. 4, doi:10.12716/1001.15.04.10, pp. 791-794, 2021.
- [13] B.M. Aliyeksiyeychuk, "Dependence of observation accuracy on significant factors

- and ways to improve it", *Shipping & Navigation*, Issue 36, DOI: 10.31653/2306-5761.36.2024.10-19, pp. 10-19, 2024.
- [14] I. Pavić, J. Mišković, J. Kasum and D. Alujević. "Analysis of Crowdsourced Bathymetry Concept and It's Potential Implications on Safety of Navigation", *TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation*, vol. 14, no. 3, doi:10.12716/1001.14.03.21, pp. 681-686, 2020.
- [15] V.M. Mudrov, V.L. Kushko. *Methods of treatment of measurings*. Sovetskoe radio, 1976.
- [16] V.V. Stepanenko. "Efficiency of assessing the parameters of the situation of dangerous approach of ships", *Shipping & Navigation*, Issue 2, pp. 201 – 209, 2000.
- [17] M. Džunda, S. Čikovský and L. Melniková. "Model of the Random Phase of Signal E6 of the Galileo Satellite Navigation System", *TransNav, International journal on marine navigation and safety of sea transportation*, vol. 17, no. 1, doi:10.12716/1001.17.01.05, pp. 61-68, 2023.
- [18] R. Bober, P. Grodzicki, Z. Kozłowski and A. Wolski, "The DGPS system improve safety of navigation within the port of Szczecin", In the 12 International Conference on Integrated Navigation Systems, 23.05, 2005, pp. 192-194.
- [19] W. Filipowicz. "Position Fixing and Uncertainty", *TransNav, the International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*, vol. 17, no. 4, doi:10.12716/1001.17.04.15, pp. 887-893, 2023.
- [20] Kubo Masayoshi, Sakakibara Shigeki, Hasegawa Yoshimi and Nagaoka Tadao. "Research of method of calculation of probability of collision of ship with the rectangular bull of bridge at tearing down by wind and flow", *Jap. Inst. Navig.* no. 104, pp. 225-233, 2001.
- [21] B. Szykuła, J. Furtak. "Dead Reckoning Method for an Unmanned Aerial Vehicle in Conditions of Limited GPS Signal", *TransNav, the International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*, Vol. 19, No. 4, doi:10.12716/1001.19.04.01, pp. 1063-1068, 2025
- [22] Y. He, B. Xu. "Enhancing ranging precision in OFDM-based LEO navigation: Signal design and receiver implementation". *NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation*, January 2026, 73 navi.741 DOI: <https://doi.org/10.33012/navi.741>.
- [23] Zixi Liu, Sherman Lo, Juan Blanch, Yu-Hsuan Chen and Todd Walter. "Locating GNSS Interference Sources using ADS-B with Non-linear Least Squares ", *NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation*, September 2025, 72(3) navi.716, DOI: <https://doi.org/10.33012/navi.716>.
- [24] A.I. Sorokin, *Hydrographic studies of the World Ocean*, Gidrometizdat, 1980.