




UDC 656.61.052

DOI: 10.31653/2306-5761.39.2026.65-83

INFLUENCE OF WATER DEPTH ON ADDED MASSES AND MOMENTS IN PLANAR SHIP MOTION

ВПЛИВ ГЛИБИНИ НА ПРИЄДНАНІ МАСИ І МОМЕНТИ ПРИ ПЛОСКОМУ РУСІ СУДНА

О. Kryvyi , *D.Sc., Professor*, **М. Miyusov** , *D.Sc., Professor*,
М. Vorokhobin , *MSc Student*

О.Ф. Кривий, *д.ф.-м.н., професор*, **М.В. Міюсов**, *д.т.н., професор*,
М.І. Ворохобін, *курсант*

National University "Odesa maritime academy", Ukraine

Національний університет «Одеська морська академія», Україна

ABSTRACT

The presence of a water layer moving together with a ship during any maneuver leads to the occurrence of added masses and moments acting on the ship hull, which significantly affect the components of inertial forces and moments. This effect becomes particularly noticeable at shallow depths and becomes critical in shallow water conditions. In planar motion of a symmetric ship, four hydrodynamic characteristics of the hull are considered non-zero: longitudinal and transverse added masses, the added moment about the ship's axis of rotation, and the static moment caused by the shift of transverse added masses relative to the axis of rotation. When developing mathematical models of ship motion, dimensionless quantities are introduced, referred to as the coefficients of the corresponding added masses and moments. The shallow water effect is described by means of an influence function defined as the ratio of these coefficients in shallow water to those in deep water. Numerous studies have been devoted to the development of mathematical models for influence functions, based on both theoretical and experimental investigations. In this paper, a comparative analysis of existing mathematical models for influence functions is carried out, revealing significant discrepancies in the results obtained using these models. The analysis of available data also made it possible, using regression analysis methods, to develop new adequate mathematical models of the influence function and to investigate the effect of relative water depth and hull geometric characteristics on added masses and moments.

Keywords: ship hull, added masses and moments, added mass coefficients, shallow water effect, mathematical models.



Copyright© 2026 the Author(s).

This is an open access article under the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) license.

Published by the *National University "Odesa Maritime Academy"*.

Date received: 21-03-2026
Date accepted: 28-04-2026
Date published (online): 31-05-2026

Cite this article as: O. Kryvyi, M. Miyusov, M. Vorokhobin "Influence of water depth on added masses and moments in planar ship motion" *Shipping & Navigation*, no. 39, pp. 65–83, 2026, doi: 10.31653/2306-5761.39.2026.65-83.

АНОТАЦІЯ

Наявність шару води, який рухається разом із судном при виконанні будь яких маневрів, призводить до виникнення приєднаних мас і моментів на корпусі судна, які суттєво впливають на значення складових інерційних сил і моментів. Цей вплив стає особливо помітним при невеликій глибині і становиться критичним на мілководді. При плоскому русі симетричного судна не нульовими вважаються чотири гідродинамічні характеристики корпусу: повздовжні і поперечні приєднані маси, приєднаний момент навколо осі обертання судна і статичний момент, викликаний зсувом поперечних приєднаних мас навколо осі обертання судна. При побудові математичних моделей руху судна переходять до безрозмірних величин, які називають коефіцієнтами відповідних приєднаних мас і моментів, вплив мілководдя описують за допомогою функції впливу, яка визначається як відношення значень вказаних коефіцієнтів на мілководді і глибокій воді. Побудові математичних моделей функцій впливу присвячено багато робіт, які спираються на теоретичні і експериментальні дослідження. Для порівняння існуючих математичних моделей для функцій впливу в даній роботі проведений їх аналіз, який виявив значні розбіжності результатів, отриманих із використанням цих моделей. Аналіз існуючих результатів також дозволив за допомогою методів регресійного аналізу отримати нові адекватні математичні моделі для функції впливу і проаналізувати вплив відносної глибини і геометричних характеристик корпусу судна на приєднані маси і моменти.

Ключові слова: корпус судна, приєднані маси і моменти, коефіцієнти приєднаних мас, вплив мілководдя, математичні моделі.

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими або практичними завданнями

Прогнозування руху судна при виконанні різних маневрів, зокрема, циркуляції, зміні курсу, гальмуванні та розгону не можливо без наявності адекватних математичних моделей динаміки судна [1 – 4]. Адекватність математичної моделі — це здатність моделі забезпечувати, в межах прийнятих припущень та області застосування, відтворення істотних характеристик, зв'язків і закономірностей реального об'єкта з точністю, яка підтверджується порівнянням результатів моделювання з експериментальними, натурними або еталонними теоретичними даними. Рівень адекватності математичних моделей руху судна безпосередньо впливає на розвиток сучасного тренажерного обладнання, авторульових, створення безекіпажних суден. Враховуючи багаторівневість математичних моделей динаміки судна, їх загальний рівень визначається адекватністю моделей інерційних і неінерційних сил, які діють на судно. Зокрема, адекватністю математичних моделей інерційних і неінерційних сил на корпусі судна [5 – 20], неінерційних сил, викликаних роботою суднових гвинтів і стерн [21 – 26].

Тут слід зазначити, що не зважаючи на існування різних підходів до побудови математичних моделей руху судна, зокрема, класичного підходу [1 – 8] і методу MMG [9 – 19, 25], всі підходи спираються на одні і ті ж гідродинамічні параметри. Зокрема, побудова математичних моделей динаміки судна неможлива без наявності адекватних математичних моделей приєднаних мас і моментів на корпусі судна, які можуть суттєво змінювати інерційні характеристики судна.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і виділення невирішених раніше частини загальної проблеми

Вивченню приєднаних мас і моментів на корпусі судна присвячена значна кількість робіт [26 – 39]. Ці роботи поєднують теоретичні і експериментальні підходи і проводились як на глибокій воді, так і мілководді. При визначенні приєднаних мас і моментів на мілководді, зазвичай, використовують відповідні їх значення на глибокій воді, з подальшим дослідженням впливу глибини за допомогою функцій впливу [34 – 37]. Базовим еталонним методом для визначення при-

єднаних мас є метод еквівалентного тривісного еліпсоїда [1 – 6, 27], виміри якого відповідають розмірам судна. При такому підході приєднані маси і момент можуть бути визначені аналітично за допомогою невластних інтегралів першого роду [27], але для практичних розрахунків, зазвичай, використовують або графіки, або спрощені емпіричні формули [2, 3]. Вказаний метод може бути використаний для суден із малою і середньою загальною повнотою: , для «повних» суден: може давати похибки, тому потребує корекції [39]. Іншим розповсюдженим методом визначення приєднаних мас і моментів є метод плоских перерізів [4, 5, 26, 27], який може бути застосований для широкого класу суднових корпусів. При визначенні впливу мілководдя на приєднані маси і момент застосовувались різні підходи. Зокрема, в роботі [35], спираючись на серію потенціальних 3D чисельних гідродинамічних розрахунків модельних корпусів David Taylor Model Basin, серії 60 (США), запропоновані емпіричні моделі для визначення функцій впливу мілководдя. Відома [4, - 5, 27] також низка експериментальних досліджень, які базуються на методах електрогідродинамічної і магнітогідродинамічної аналогії та вібраційних методах. Аналіз існуючих результатів показав, що на глибокій воді а також і на мілководді існуючі емпіричні моделі дають різні результати, крім того, невідомі чіткі критерії, яким повинні задовольняти коефіцієнти приєднаних мас і моменту для корпусів реальних суден.

Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Метою даної роботи є аналіз існуючих та отримання нових адекватних математичних моделей для функцій впливу глибини на приєднані маси і моменти при плоскому (3D) русі судна, дослідження впливу глибини і геометричних параметрів судна на поведінку приєднаних мас і моменту на корпусі судна при плоскому русі на мілководді.

Виклад матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів

1. Класифікація впливу і функції впливу мілководдя на приєднанні маси і момент.

В роботі [39] показано, що суттєвими чинниками, які впливають на значення коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь плоского руху судна, є приєднані маси і момент на корпусі судна, визначення яких є доволі складною задачею навіть на глибокій воді. Але, при дослідженні маневрів суден в каналах, акваторії річок і портів або при підході до них, на приєднані маси і момент на корпусі судна суттєво впливає також глибина фарватеру H району плавання. Цей вплив характеризує безрозмірні величини: $H_T = \frac{H}{T}$, або $T_H = \frac{T}{H}$, де T – осадка судна. В залежності від значення параметра T_H вирізняють:

- глибоку воду: $T_H < 0.2$;
- середню глибину (або середнє мілководдя): $0.2 \leq T_H < 0.67$;
- мілководдя: $0.67 \leq T_H < 0.83$;
- критичне мілководдя: $0.83 \leq T_H < 1$.

Вплив глибини H на гідродинамічні характеристики судна стає помітним на середній глибині, дуже значний на мілководді і починає домінувати на критичному мілководді. Відомі теоретичні і експериментальні дослідження [34 – 38] в цьому напрямку. Вплив глибини на приєднанні маси і момент визначають за допомогою функцій впливу $f_{kk}(T_H)$, $k = 1, 2, 6$, так:

$$\begin{aligned} \frac{k_{11H}}{k_{11}} &= 1 + f_{11}(T_H); \\ \frac{k_{22H}}{k_{22}} &= 1 + f_{22}(T_H); \\ \frac{k_{66H}}{k_{66}} &= 1 + f_{66}(T_H). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут k_{11} , k_{22} і k_{66} – коефіцієнти приєднаних мас і моменту на глибокій воді, k_{11H} , k_{22H} і

k_{66H} – коефіцієнти приєднаних мас і моменту на мілководді, які враховують вплив глибини фарватеру. Зауважимо, що монотонно зростаючі функції $f_{kk}(T_H)$ повинні задовольняти умовам:

$$0 \leq f_{kk}(T_H) < \infty, \lim_{T_H \rightarrow 0} f_{kk}(T_H) = 0, k = 1, 2, 6. \quad (2)$$

При $T_H < 0.2$ вплив мілководдя можна вважати не суттєвим, а значення функцій f_{kk} ($k = 1, 2, 6$) рівними нулю, в цьому випадку: $k_{11H} = k_{11}$, $k_{22H} = k_{22}$, $k_{66H} = k_{66}$.

Чіткі критерії, яким повинні задовольняти функції f_{kk} , крім виконання умов (2), наразі невідомі. Але їх все ж можна оцінити, якщо скористатись результатами відомих досліджень, зокрема [27], де наведені графічні залежності поведінки приєднаних мас і моменту від параметра T_H для еквівалентного тривісного еліпсоїда до дубльованого корпусу судна і суден внутрішнього плавання, які отримані методом електромагнітної аналогії [4, 6, 27]. Для зручності подамо ці графічні значення в Таблиці 1.

Тут слід зауважити, що дані таблиці 1 не враховують геометричні параметри суден, їх можна розглядати як базові середні значення для корпусів середньої повноти для помірного мілководдя, зокрема при $T_H < 0.67$.

2. Аналіз існуючих математичних моделей для функцій впливу мілководдя.

Зазвичай, безрозмірні коефіцієнти приєднаних мас і моменту подають через геометричні характеристики судна (довжину L , ширину B , осадку T) і глибину фарватеру H :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= C_B; \\ \eta_2 &= B/L; \\ \eta_3 &= T/L; \\ \eta_4 &= T/B, \quad T_H = T/H, \end{aligned} \quad (3)$$

шляхом обробки експериментальних даних, або за допомогою обчислювальної гідродинаміки.

В таблиці 2 наведені значення геометричних характеристик (3) для 16 основних типів суден (див., наприклад, роботу [39]), а саме танкерів (ST): LPG, VLGC, KVLCC2, VLCC ESS0; контейнеровозів (SCo): SR 108, KCS, DTC; автомобілевоза (Scar): PCC; балкерів (SB): Handysize (Hz), Supramax (Sm), Kamsarmax (Km), Capesize (Cs); риболовецьких суден (SF): японського (J), сейнера (S) і двох навчально-промислових риболовецьких суден (T).

Відома низка робіт, зокрема [4, 6, 31 – 38], в яких досліджувалась вплив мілководдя на приєднані маси корпусу судна.

Таблиця 1. Значення f_{kk} для еліпсоїда і корпусу судна

	T_H	0.2	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.714
Еліпсоїд	$f_{11}(T_H)$	0.05	0.16	0.25	0.34	0.45	0.55	0.7	0.85	1.02	1.19	1.3
	$f_{22}(T_H)$	0.06	0.12	0.2	0.26	0.38	0.47	0.65	0.83	1.8	1.38	1.61
	$f_{66}(T_H)$	0.09	0.25	0.35	0.44	0.55	0.68	0.80	0.99	1.17	1.40	1.55
Корпус	$f_{11}(T_H)$	0.06	0.18	0.32	0.39	0.51	0.64	0.76	0.94	1.11	1.29	1.5
	$f_{22}(T_H)$	0.065	0.17	0.25	0.32	0.43	0.55	0.74	0.94	1.16	1.50	1.83
	$f_{66}(T_H)$	0.1	0.29	0.40	0.50	0.62	0.75	0.89	1.11	1.28	1.53	1.70

Таблиця 2. Параметри для деяких типів суден

№	Тип	$\eta_1 = C_B$	$\eta_2 = B/L$	$\eta_3 = T/L$	$\eta_4 = T/B$	№	Тип	$\eta_1 = C_B$	$\eta_2 = B/L$	$\eta_3 = T/L$	$\eta_4 = T/B$
1	LPG	0.74	0.174	0.060	0.3451	9	SB Hm	0.80	0.174	0.062	0.3567
2	VLGC	0.72	0.162	0.052	0.3224	10	SB Sm	0.77	0.162	0.061	0.3789
3	KVLCC2	0.80	0.181	0.065	0.3586	11	SB Km	0.80	0.141	0.063	0.4105
4	VLCC ESS0	0.83	0.163	0.067	0.4113	12	SB Cs	0.83	0.155	0.063	0.4044
5	SR 108	0.56	0.145	0.049	0.3347	13	SFJ	0.684	0.220	0.081	0.3704
6	KCS	0.65	0.140	0.047	0.3354	14	SFT 1	0.617	0.200	0.074	0.3690
7	DTC	0.66	0.144	0.041	0.2843	15	SFS	0.557	0.214	0.079	0.3676
8	PCC	0.54	0.170	0.048	0.2844	16	SFT 2	0.538	0.209	0.082	0.3922

В Таблиці 3 наведені відомі емпіричні моделі для визначення функцій впливу f_{kk} ($k = 1, 2, 6$) мілководдя на приєднанні маси і момент. В таблиці введені наступні позначення:

$$\theta_{22} = \frac{6(1 - C_{WL}\sigma_d)}{C_{WL}(1 + \sigma_d)(2 - C_{WL} - \sigma_d)};$$

$$\theta_{66} = \frac{2\sigma_d(9 - 6C_{WL} - 6\sigma_d + 4C_{WL}\sigma_d)}{C_{WL}(6 - 5C_{WL} - 5\sigma_d + 4C_{WL}\sigma_d)} \times \frac{(3 - 2C_{WL} - 2\sigma_d + C_{WL}\sigma_d^2)}{(9 - 9\sigma_d + 2\sigma_d^2)}, \quad (4)$$

де C_{WL} – безрозмірні коефіцієнт повноти площі ватерлінії; σ_d – приведений коефіцієнт повноти зануреної частини батоксу.

Зауважимо, що математичні моделі 4 отримані, при виконанні умов: $0.5 \leq \eta_1 \leq 0.92$, $\eta_2 < 0.25$, $0.1 \leq \eta_4 \leq 0.5$, які виконуються для суден із таблиці 1. Моделі 5 не залежать від геометричних параметрів судна і дають фактично середні значення функцій f_{kk} .

Наявність такої кількості різних математичних моделей призводить до необхідності їх аналізу і вибору найбільш адекватних для подальшого застосування. Тому проведено числовий аналіз математичних моделей наведених в таблиці 3.

На рисунках 1 – 4 наведені залежності від параметра T_H для функції f_{11} ; на рисунках 5 – 8 для функції f_{22} ; на рисунках 9 – 12 для функції f_{66} . При цьому на усіх рисунках

Таблиця 3. Математичні моделі для функцій впливу f_{kk}

Функція	№	Модель	Джерело
$f_{11}(T_H)$	1	$\kappa_{11}(e^{\kappa_{12}T_H} - 1)$, $\kappa_{11} = 0.705 + 0.05\eta_1 - 0.5\eta_4$, $\kappa_{12} = 2.8 - \eta_4 - 0.8\eta_1$	[35, 37]
	2	$\left(3.77 + \frac{1.14}{\eta_4} - \frac{0.233}{\eta_3} - 3.43\eta_1\right) \left(\frac{T_H}{1 - T_H}\right)^{1.3}$	[36, 37]
	3	$(25.817\eta_4 - 24.717\eta_1 + 11.0148) e^{\kappa_{13}T_H} - 1$ $\kappa_{13} = -27.096\eta_4 + 15.367\eta_1 - 0.748$	[38]
	4	$1.4T_H^{1.5} \left(\frac{1}{0.4755\eta_4 + 7.608\eta_2\eta_3} - 1\right)$	[4,6]
	5	$2.55T_H^2 - 0.069T_H$	[4]

Продовження таблиці 3

Функція	№	Модель	Джерело
$f_{22}(T_H)$	1	$\kappa_{21}(e^{\kappa_{22}T_H} - 1)$, $\kappa_{21} = -0.02\eta_4 + 0.07\eta_1 + 0.0098$, $\kappa_{22} = 7 - 1.1\eta_4 - 2.2\eta_1$	[35, 37]
	2	$\left(0.413 + \frac{0.032}{\eta_4} + \frac{0.0129}{\eta_4^2}\right) \left(\frac{T_H}{1-T_H}\right)^{0.82}$	[36, 37]
	3	$(-0.054\eta_4 - 0.131\eta_1 + 0.134) e^{\kappa_{23}T_H} - 1$ $\kappa_{23} = 0.066\eta_4^{-1} + 12.875\eta_1 - 2.936$	[38]
	4	$\frac{0.072\sigma_d}{\eta_4\theta_{22} + 2.35\eta_4} \cdot \frac{T_H}{(1-3.11T_H + 3.77T_H^2 - 1.66T_H^3)}$	[4,6]
	5	$3.17T_H^2 - 0.214T_H$	[4]
$f_{66}(T_H)$	1	$\kappa_{61}(e^{\kappa_{62}T_H} - 1)$ $\kappa_{61} = 0.001\eta_1 - 0.02\eta_4 + 0.0232$; $\kappa_{62} = \eta_1 - 0.75\eta_4 + 4.405$	[35, 37]
	2	$\left(0.413 + \frac{0.0192}{\eta_4} + \frac{0.00554}{\eta_4^2}\right) \left(\frac{T_H}{1-T_H}\right)^{0.82}$	[36, 37]
	3	$\left(1.4864\eta_1 - \frac{0.7927}{\eta_4} + \frac{0.147}{\eta_4^2} + \frac{0.042}{\eta_3} - 0.5418\right) \left(\frac{T_H}{1-T_H}\right)^{0.7157}$	[38]
	4	$\frac{0.1327(1+\eta_1^2)\sigma_d^2T_H}{\theta_{66}\eta_4 + 3.68\eta_4 - 2.27\eta_4^2} \cdot \frac{1-2.9T_H + 3.37T_H^2 - 1.47T_H^3}{1-2.9T_H + 3.37T_H^2 - 1.47T_H^3}$	[4,6]
	5	$4.33T_H^2 - 1.04T_H$	[4]

моделі 1 зображені чорним лініями, моделі 2 – зеленими, модель 3 – жовтими, моделі 4 – червоним, моделі 5 – синіми лініями.

Для тестування на рисунках 1, 5, 9 використанні параметри судна 16 (див. таблицю 2), для якого значення $C_B = 0.538$; на рисунках 2, 6, 12 – судна 6, для якого $C_B = 0.65$; на рисунках 3, 7, 11 – судна 1, для якого $C_B = 0.74$; на рисунках 4, 8, 12 – судна 12, для якого $C_B = 0.83$.

Аналіз графіків на рис. 1 – 4, зокрема, показує, що математична модель 2 для $f_{11}(T_H)$ при $C_B = 0.65$, і математична модель 3 при $C_B = 0.538$ не задовольняють умовам (2).

Крім того при $C_B = 0.538$ і $C_B = 0.74$ значення $f_{11}(T_H)$, які отримані за допомогою математичної моделі 2, значно завищені при $T_H > 0.5$ і не узгоджуються із значеннями таблиці 1.

Математичні моделі 1 – 5 для функції $f_{22}(T_H)$, загалом, дають кращі результати (див. Рис. 5 – 8), принаймні вони всі задовольняють умовам (2). Також помітно, що для всіх моделей значення добре узгоджуються при середніх значеннях коефіцієнта повноти: $C_B = 0.65 \div 0.74$ для глибокої і середньої води: $T_H < 0.65$, в тому числі для моделі 5, яка не залежить від геометричних характеристик корпусу судна.

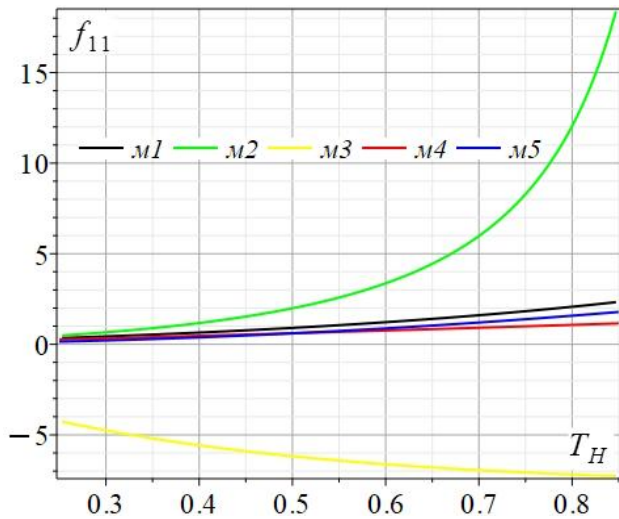


Рис. 1. Поведінка $f_{11}(T_H)$, при $C_B = 0.538$, судно 16

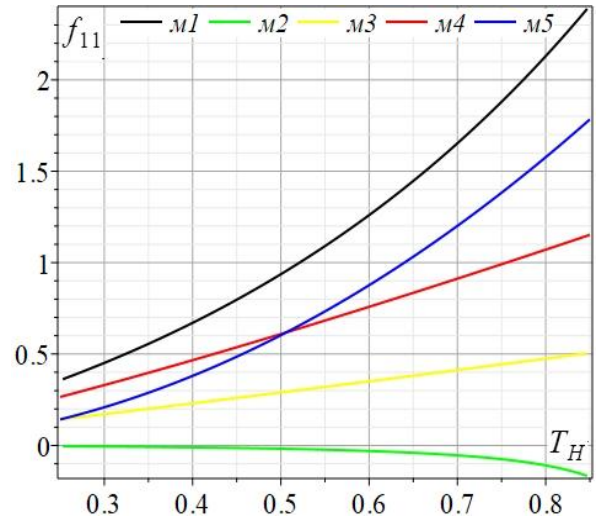


Рис. 2. Поведінка $f_{11}(T_H)$, при $C_B = 0.65$, судно 6

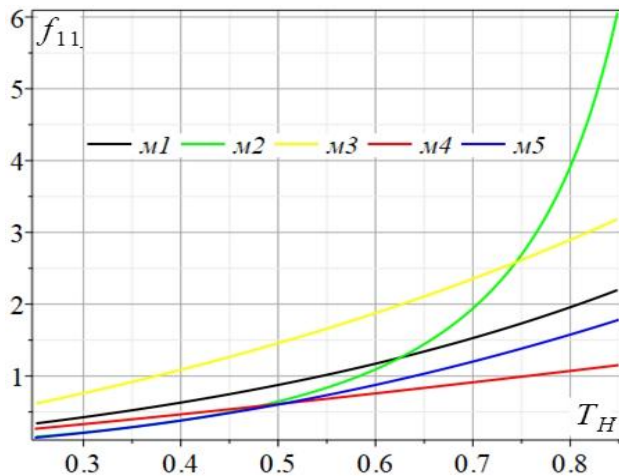


Рис. 3. Поведінка $f_{11}(T_H)$, при $C_B = 0.74$, судно 1

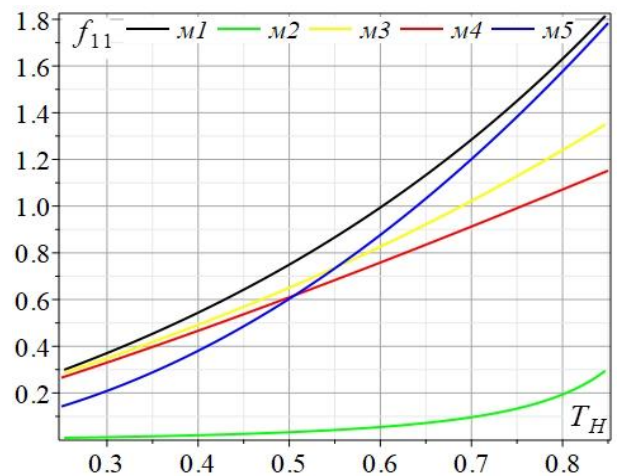


Рис. 4. Поведінка $f_{11}(T_H)$, при $C_B = 0.83$, судно 12

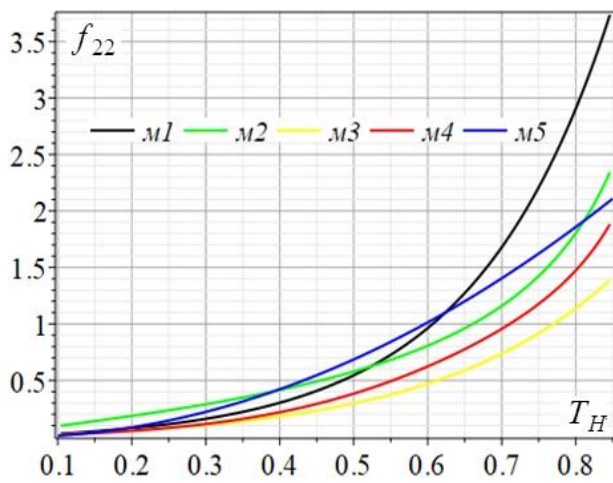


Рис. 5. Поведінка $f_{22}(T_H)$, при $C_B = 0.54$, судно 16

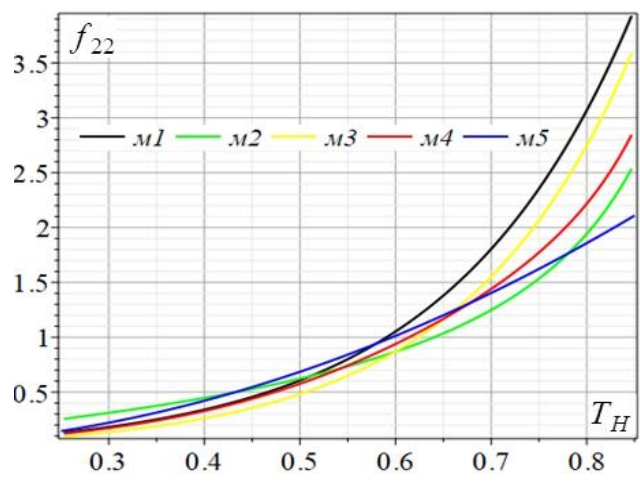


Рис. 6. Поведінка $f_{22}(T_H)$, при $C_B = 0.65$, судно 6

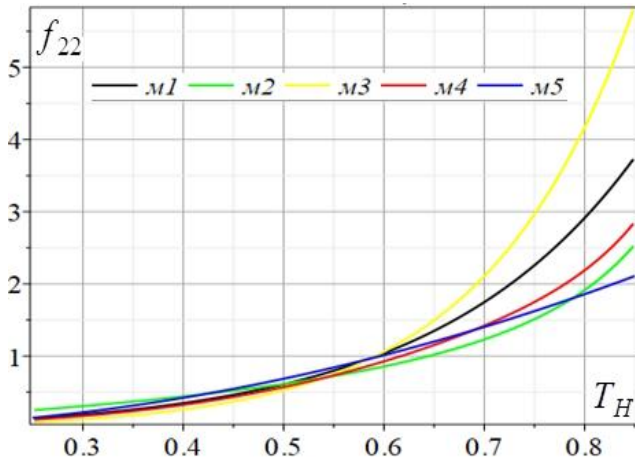


Рис. 7. Поведінка $f_{22}(T_H)$, при $C_B = 0.74$, судно 1

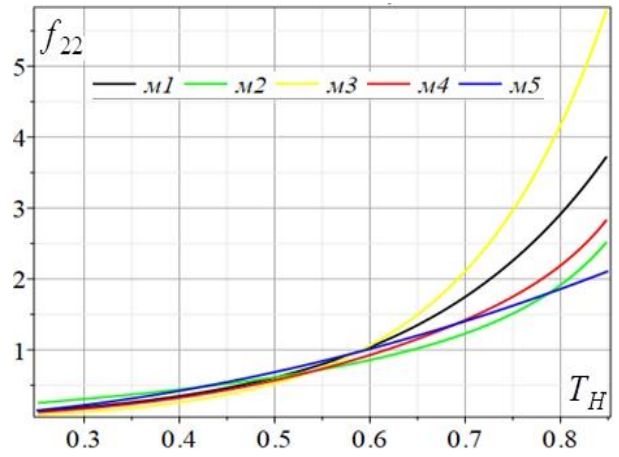


Рис. 8. Поведінка $f_{22}(T_H)$, при $C_B = 0.83$, судно 12

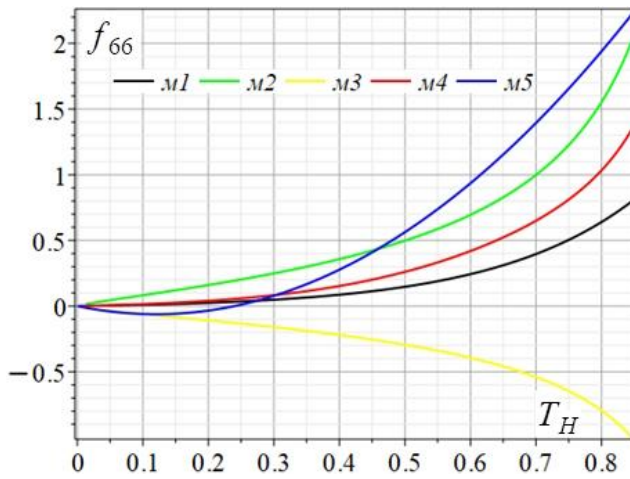


Рис. 9. Поведінка $f_{66}(T_H)$, при $C_B = 0.54$, судно 16

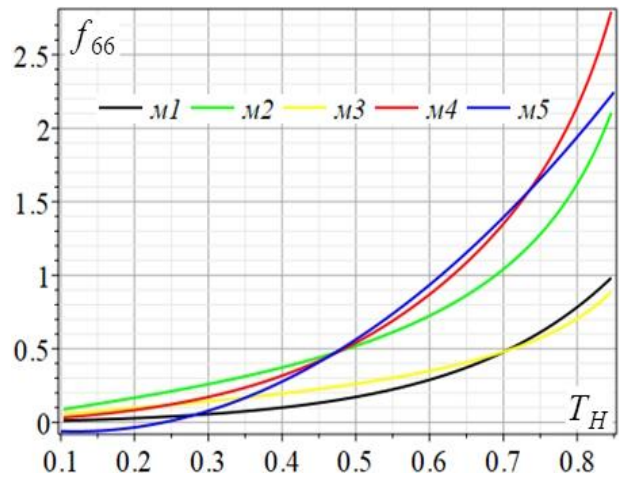


Рис. 10. Поведінка $f_{66}(T_H)$, при $C_B = 0.65$, судно 6

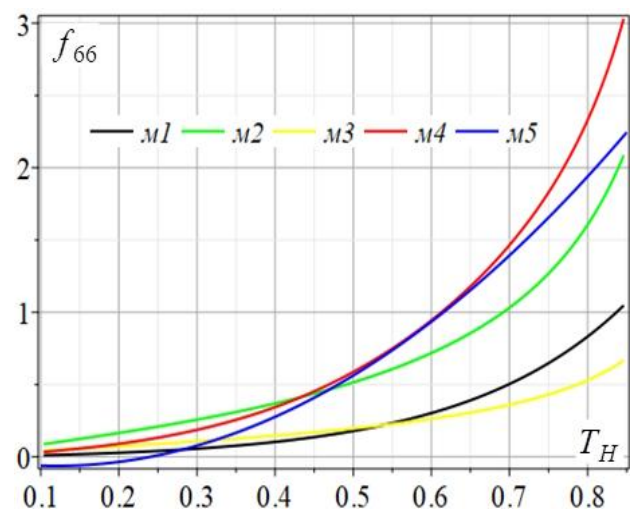


Рис. 11. Поведінка $f_{66}(T_H)$, при $C_B = 0.74$, судно 1

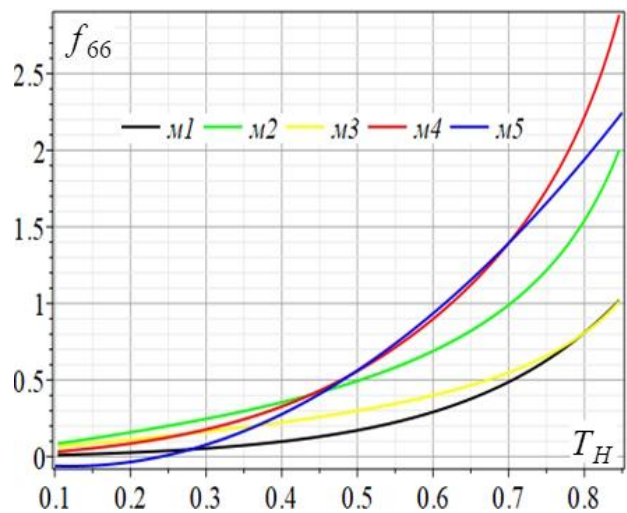


Рис. 12. Поведінка $f_{66}(T_H)$, при $C_B = 0.83$, судно 12

Що стосується інших діапазонів зміни коефіцієнта повноти, особливо для мілководдя і критичного мілководдя: $T_H > 0.67$, помітна суттєва розбіжність значень для усіх моделей, особливо це помітно для моделей 2 і 3. Значно гірші результати демонструють математичні моделі для функції $f_{66}(T_H)$, (див. Рис.9 – 12), тут помітна розбіжність в значеннях для усього діапазону зміни коефіцієнта C_B . Зокрема, при $C_B = 0.54$, значення отримані за допомогою математичної моделі 3 не задовольняють умовам (2), при інших C_B помітне заниження значень і не узгодження їх із даними таблиці 1, дещо заниженими загалом виглядають також значення функції $f_{66}(T_H)$, які отримані за допомогою математичної моделі 1. Умовам (2) не задовольняє модель 5 для глибокої води: $T_H < 0.2$. Крім того, моделі 5 не залежить від параметрів судна для усіх функцій впливу, що виглядає достатньо сумнівним і суперечить експериментальним дослідженням [40]. Адекватні значення отримані за допомогою моделей 4, але вона вимагають досить громіздких обчислень і наявності додаткових параметрів судна, таких як коефіцієнтів повноти площі ватерлінії C_{wl} і повноти зануреної частини батоксу σ_d . Найбільш адекватною виглядає модель 1, яка є достатньо простою і враховує геометричні параметри корпусу судна (4). Але при цьому вона також потребує уточнення, тому що при малих значеннях $T_H < 0.5$, на середній і глибокій воді, математична модель дає дещо завищені значення функції $f_{11}(T_H)$. Дійсно, практично для усіх суден, маємо $f_{11}(0.3) \approx 0.35$, тобто коли глибина фарватеру H більше чим в 3 раз перевищує осадку, вплив дна на приєднані маси становиться все ще помітним і складає більше 35%, що не узгоджується, зокрема. із даними таблиці 1. Крім того, ця модель також дещо занижує значення функції $f_{66}(T_H)$ для усіх C_B .

3. Побудова нових математичних моделей для функцій впливу мілководдя.

Проведений вище аналіз показує, що ні одна із наведених моделей не може бути використана для визначення функцій впливу f_{kk} ($k = 1, 2, 6$) мілководдя для усього діапазону значень параметрів корпусу судна і усіх значень T_H . Тому виникає необхідність отримати такі адекватні математичні моделі.

Складність такої побудови полягає в тому, що наразі не відомі результати експериментальних досліджень, які б охоплювали весь спектр значень параметрів судна і мілководдя. Крім того такі дослідження пов'язані із значними технічними труднощами при проведенні експериментів. Числові дослідження також мають суттєві проблеми, які пов'язані із складністю врахування форми корпусу судна, і отримання гідродинамічних потенціалів, які б адекватно враховували фактор мілководдя.

Тому для побудови математичних моделей для функцій $f_{kk}(T_H)$, ($k = 1, 2, 6$) застосуємо наступний підхід. Спочатку скориставшись результатами таблиці 1, методами регресійного аналізу [23 – 24], отримаємо для функцій впливу $\tilde{f}_{kk}(T_H)$, ($k = 1, 2, 6$), при $T_H < 0.72$, наступні поліноміальні математичні моделі (м6):

$$\tilde{f}_{11}(T_H) = 2.85167 T_H^3 + 0.37071 T_H. \quad (5)$$

$$\tilde{f}_{22}(T_H) = 5.4201 T_H^4 + 0.41704 T_H. \quad (6)$$

$$\tilde{f}_{66}(T_H) = 3.3609 T_H^2 - 0.1388 T_H. \quad (7)$$

Всі отримані моделі мають скоригований коефіцієнт кореляції $R^2 = 0.997$, що свідчить про їх відмінну адекватність. Останнє дає можливість їх використати в якості еталону для суден із середньою повнотою: $C_B \approx 0.63 \div 0.74$, при $0.2 < T_H < 0.72$. Ці моделі також будемо порівнювати із математичними моделями 5 [4], які отримані експериментальним шляхом приблизно для такого ж класу суден.

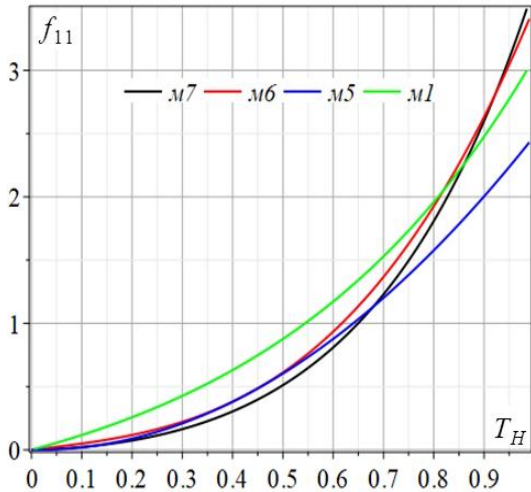


Рис. 13. Верифікація нової математичної моделі для $f_{11}(T_H)$

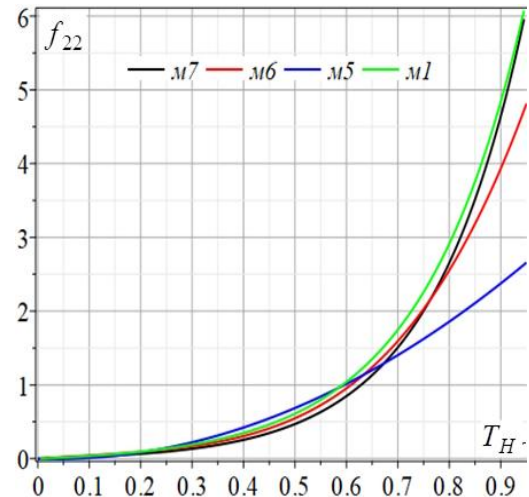


Рис. 14. Верифікація нової математичної моделі для $f_{22}(T_H)$

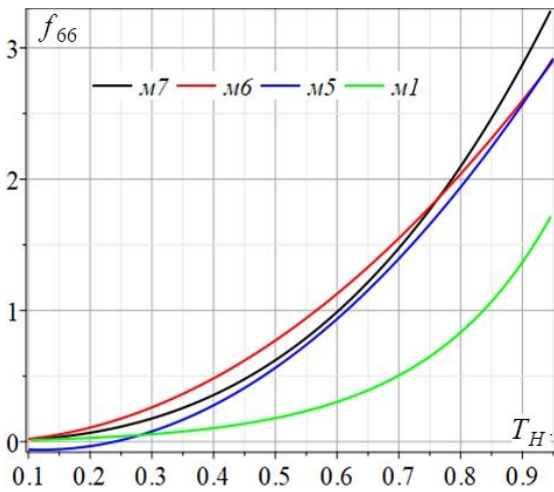


Рис. 15. Верифікація нової математичної моделі для $f_{66}(T_H)$

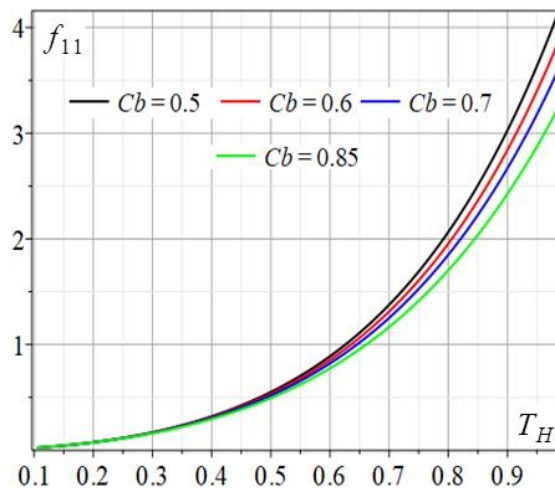


Рис. 16. Залежність $f_{11}(T_H)$ від коефіцієнта повноти C_B

Отримані моделі (5) – (7) не враховують геометричні параметри корпусів суден. Для усунення цього недоліку, виходячи із результатів роботи [35], функції впливу мілководдя будемо розшукувати так:

$$f_{kk}(T_H) = \kappa_{k1} T_H^{\gamma_k} e^{\kappa_{k2} T_H^{\omega_k}}, \quad k = 1, 2, 6. \quad (8)$$

Тут коефіцієнти κ_{kj} залежать від геометричних параметрів судна і в першому наближенні їх будемо вважати такими як і в математичній моделі 1. Зауважимо, що подання (8) відрізняються від формул із математичної моделі 1. Уточнення коефіцієнтів

κ_{kj} , а також значення параметрів γ_k і ω_k знайдемо, скориставшись умовами

$$\min_{\gamma_k, \omega_k} |f_{kk}(T_H) - \tilde{f}_{kk}(T_H)| \rightarrow 0,$$

$$0.2 < T_H < 0.72,$$

$$C_B \approx 0.63 \div 0.74,$$

$$k = 1, 2, 6. \quad (9)$$

В результаті числової реалізації умов (9), отримані наступні нові подання для функцій впливу мілководдя (моделі 7):

$$f_{11}(T_H) = (0.705 + 0.05\eta_1 - 0.5\eta_4) \times T_H^{1.5} e^{(2.8 - \eta_4 - 0.8\eta_1)T_H} \quad (10)$$

$$f_{22}(T_H) = (0.07\eta_1 - 0.02\eta_4 + 0.098) \times T_H^{0.5} e^{(7.0 - 1.1\eta_4 - 2.2\eta_1)T_H} \quad (11)$$

$$f_{66}(T_H) = (0.035 + 0.001\eta_1 - 0.02\eta_4) \times T_H^{1.5} e^{(4.405 + \eta_1 - 0.75\eta_4)T_H^{0.25}} \quad (12)$$

Тут слід зауважити, що коефіцієнт k_{31} у виразах (8) і (12) для функції $f_{66}(T_H)$ зазнав змін в порівнянні із відповідним коефіцієнтом математичної моделі 1 із таблиці 3, всі інші коефіцієнти співпадають.

Для верифікації отриманих математичних моделей на рисунках 13 – 15 наведенні графіки відповідно для функцій $f_{11}(T_H)$, $f_{22}(T_H)$, $f_{66}(T_H)$, які отримані відповідно за допомогою формул (10) – (12): моделі 7 – чорна лінія; формул (5) – (7): моделі 6 – червона лінія; моделі 5 – синя лінія і моделі 1 – зелена лінія. Всі графіки отримані для геометричних параметрів корпусу судна 1, для якого: $C_B = 0.74$. Отримані результати підтверджують відмінну адекватність отриманих математичних моделей 7. Зокрема, вони добре узгоджуються при $0.3 < T_H < 0.72$ із експериментальними моделями 5 і 6. Що стосується моделей 1, то є узгодження тільки для функції $f_{22}(T_H)$, при цьому для функції $f_{11}(T_H)$ модель 1 дає завищенні результати, зокрема на мілководді, а для функції $f_{66}(T_H)$ занижені значення в порівнянні із іншими моделями, що підтверджує доцільність використання саме нових математичних моделей 7.

4. Аналіз залежності функцій впливу мілководдя від геометричних параметрів судна.

За допомогою отриманими моделями (10) – (12), досліджено вплив на функції f_{kk} ($k = 1, 2, 6$) геометричних параметрів корпусу судна. На рисунках 16 – 18 наведені залежності відповідно функцій $f_{11}(T_H)$, $f_{22}(T_H)$,

$f_{66}(T_H)$, від коефіцієнта повноти, а на рисунках 19 – 21 від параметру η_4 . При цьому на рисунках 16 – 18 лінії чорного кольору відповідає значенню $C_B = 0.5$, лінія червоного кольору значенню $C_B = 0.6$, синього кольору значенню $C_B = 0.7$ і зеленого кольору значенню $C_B = 0.85$.

На рисунках 19 – 21 лінія чорного кольору відповідає значенню $\eta_4 = 0.24$, лінія червоного кольору значенню $\eta_4 = 0.32$, синього кольору значенню $\eta_4 = 0.37$ і зеленого кольору значенню $\eta_4 = 0.46$. Дослідження підвердили вплив геометричних параметрів корпусу судна на збільшення приєднаних мас і моменту при зменшенні глибини фарватеру, тобто при збільшенні параметра T_H . Зокрема, для f_{66} вказаний вплив стає помітний вже при $T_H \geq 0.5$, для f_{11} при $T_H \geq 0.6$ і для f_{22} при $T_H \geq 0.65$. При цьому функції f_{11} і f_{22} досягають більших значень при менших коефіцієнтах загальної повноти C_B і менших значеннях параметра η_4 , а функція f_{66} досягає більших значеннях при більших значеннях коефіцієнта C_B і також при менших значеннях параметра $\eta_4 = T/B$.

На рисунках 23 – 25 подані 3D графіки відповідно функцій $f_{11}(C_B, \eta_4)$, $f_{22}(C_B, \eta_4)$, $f_{66}(C_B, \eta_4)$ при $C_B \in (0.5; 0.85)$ і $\eta_4 \in (0.24; 0.5)$ для різних значень параметра T_H .

На усіх графіках жовта поверхня (поверхня 1) відповідає значенню $T_H = 0.3$; червона поверхня (поверхня 2) відповідає значенню $T_H = 0.55$; блакитна поверхня (поверхня 3) відповідає $T_H = 0.7$; синя поверхня (поверхня 4) відповідає $T_H = 0.8$ і зелена поверхня (поверхня 5) відповідає значенню $T_H = 0.9$.

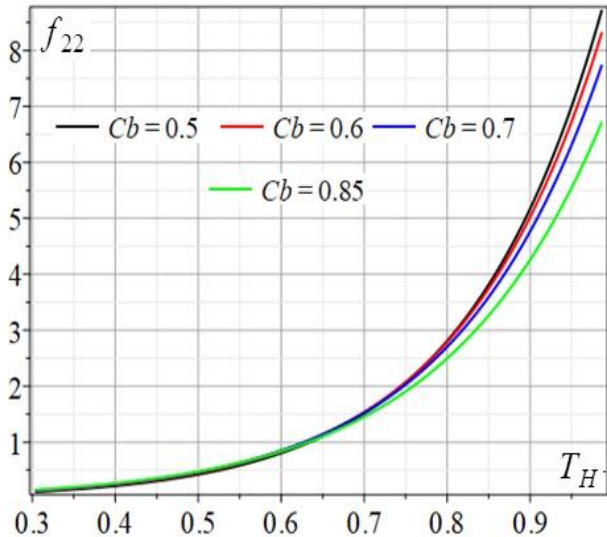


Рис. 17. Залежність $f_{22}(T_H)$ від C_B

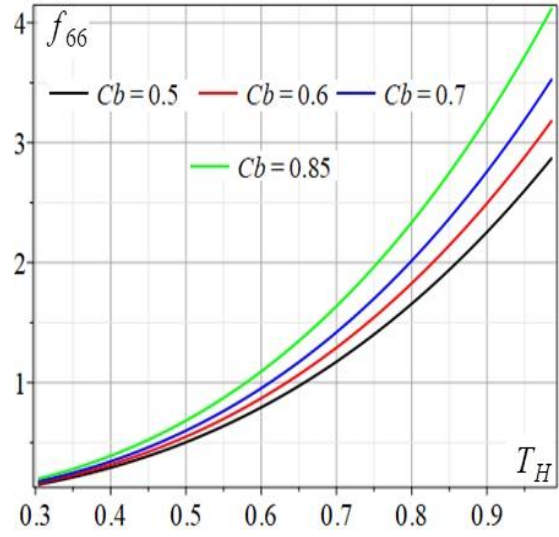


Рис. 18. Залежність $f_{66}(T_H)$ від C_B

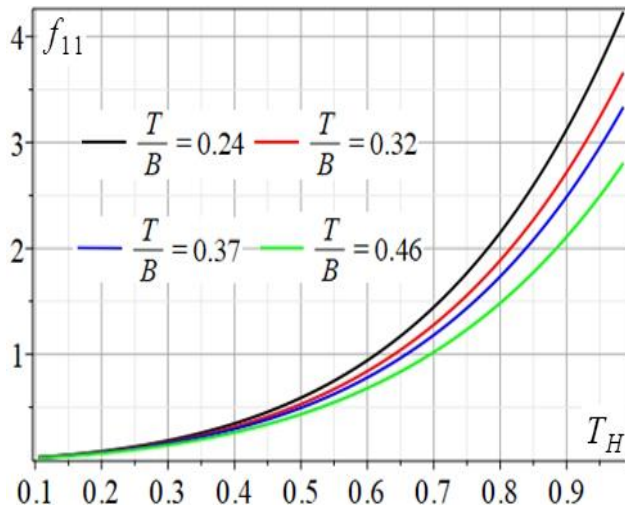


Рис. 19. Залежність $f_{11}(T_H)$ від параметра η_4

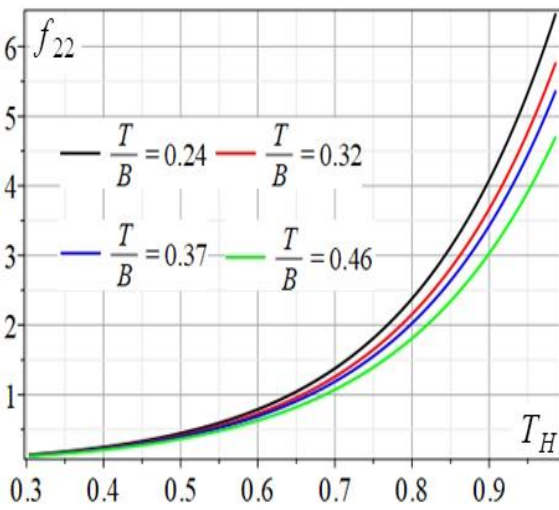


Рис. 20. Залежність $f_{22}(T_H)$ від параметра η_4

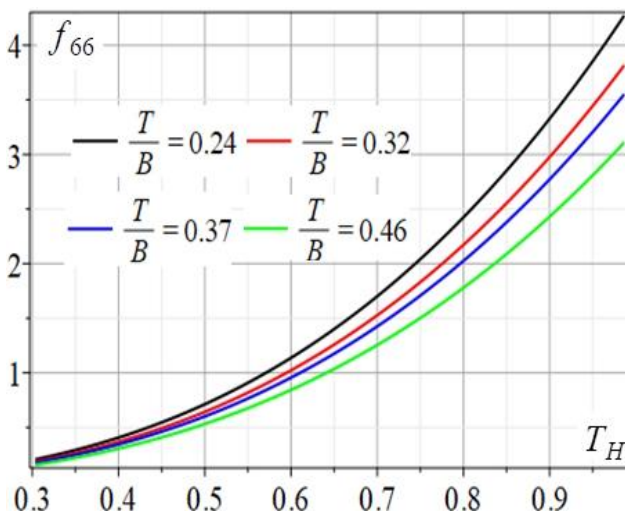


Рис. 21. Залежність $f_{66}(T_H)$ від параметра η_4

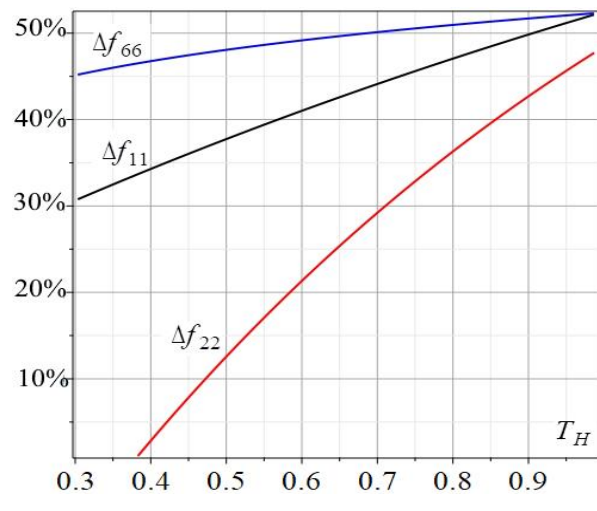


Рис. 22. Вплив герметичних параметрів корпусу судна на f_{kk}

Наведені поверхні для усіх функцій для середнього мілководдя при $T_H > 0.65$ мають нахил відносно площини (C_B, η_4) , який збільшується із зростанням значень T_H , це підтверджує залежність функцій впливу мілководдя від геометричних параметрів судна особливо для мілководдя і для критичного мілководдя.

Отже, функції впливу мілководдя можна вважати функціями трьох параметрів: $f_{kk} = f_{kk}(C_B, \eta_4, T_H)$, ($k = 1, 2, 6$). Введемо наступні величини:

$$\Delta f_{11}(T_H) = \frac{|f_{11\max}(T_H) - f_{11\min}(T_H)|}{f_{11\max}(T_H)} 100\%. \quad (13)$$

$$\Delta f_{22}(T_H) = \frac{|f_{22\max}(T_H) - f_{22\min}(T_H)|}{f_{22\max}(T_H)} 100\%. \quad (14)$$

$$\Delta f_{66}(T_H) = \frac{|f_{66\max}(T_H) - f_{66\min}(T_H)|}{f_{66\max}(T_H)} 100\%. \quad (15)$$

де $f_{11\max} = f_{11}(0.5, 0.24, T_H)$,
 $f_{11\min} = f_{11}(0.85, 0.5, T_H)$,
 $f_{22\max} = f_{22}(0.5, 0.24, T_H)$,
 $f_{22\min} = f_{22}(0.85, 0.5, T_H)$,
 $f_{66\max} = f_{66}(0.5, 0.24, T_H)$,
 $f_{66\min} = f_{66}(0.85, 0.5, T_H)$

– максимальні і мінімальні значення функцій впливу, які знайдемо із графіків рисунків 23 – 25.

Функції $\Delta f_{kk}(T_H)$, $k = 1, 2, 6$, визначають для кожного значення T_H можливу зміну значень функцій впливу мілководдя (в процентах) за рахунок зміни геометричних параметрів корпусу судна $C_B \in (0.5; 0.85)$ і $\eta_4 \in (0.24; 0.5)$. На рисунку 22 наведенні графіки функцій (13) – (15), чорна лінія відповідає функції $\Delta f_{11}(T_H)$, червона – функції $\Delta f_{22}(T_H)$ і синя – функції $\Delta f_{66}(T_H)$.

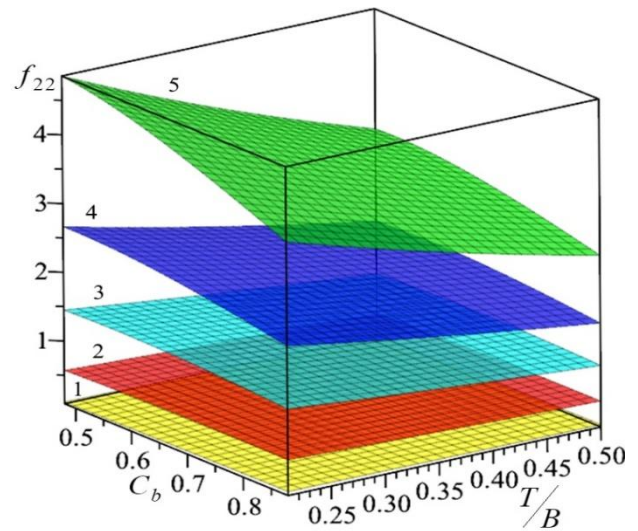


Рис. 24. Залежність $f_{22}(T_H)$ від C_B і η_4

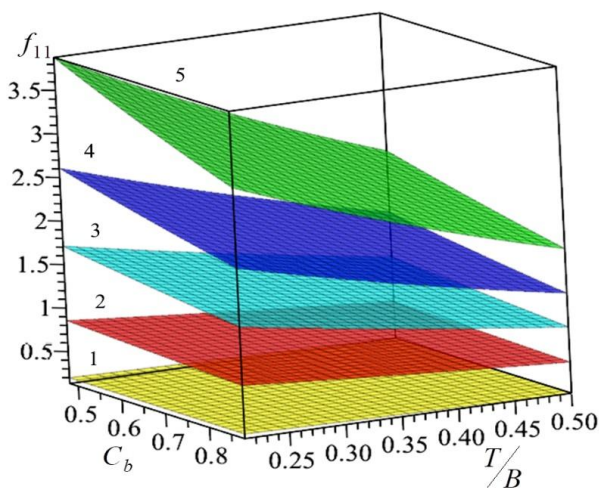


Рис. 23. Залежність $f_{11}(T_H)$ від C_B і η_4

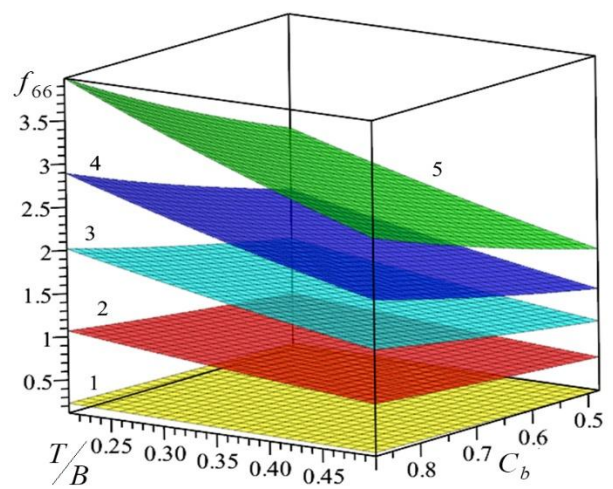


Рис. 25. Залежність $f_{66}(T_H)$ від C_B і η_4

Отримані результати підтверджують вплив геометричних параметрів судна на функції впливу мілководдя. Найбільш суттєвим цей вплив виявляється на функцію f_{66} і може змінюється від 45% на середній глибині до 52% при критичному мілководді. Дещо меншим, але все одно суттєвим вказаний вплив є на функцію f_{11} . Вплив геометричних параметрів корпусу судна на функцію f_{22} стає помітним при $T_H > 0.55$ і може змінюватись від 15% до 47% при критичному мілководді.

Висновки і перспектива подальшої роботи по даному напрямку

В результаті проведених досліджень отримані наступні результати:

- виконано порівняльний аналіз існуючих математичних моделей функцій впливу $f_{kk}(T_H)$, ($k = 1, 2, 6$), який виявив значні розбіжності результатів.
- отримані нові адекватні математичні моделі функцій впливу мілководдя на приєднані маси і момент для плоского руху судна (10) – (12), які враховують геометричні параметри суден, і проведено їх порівняння із відомими експериментальними даними;
- за допомогою отриманих моделей досліджено вплив глибини і геометричних параметрів судна на приєднані маси і момент при плоскому русі судна і виявлено низку важливих закономірностей їх поведінки, зокрема, встановлено:
 - коефіцієнт повздовжніх приєднаних мас k_{11} може збільшуватись на середній глибині до 140%; на мілководді до 230% і на критичному мілководді до 400%;
 - коефіцієнт поперечних приєднаних мас k_{22} може збільшуватись на середній глибині до 110%; на мілководді до 250% і на критичному мілководді до 600%;
 - коефіцієнт приєданого моменту k_{66} може збільшуватись на середній глибині до 150%; на мілководді до 270% і на критичному мілководді до 400%;

- при зменшенні параметра η_4 від 0.46 до 0.24 коефіцієнт k_{11} на середній глибині може збільшитись на 30%, на мілководді на 80% і критичному мілководді на 105%;
- при зменшенні параметра η_4 від 0.46 до 0.24 коефіцієнт k_{22} на середній глибині може збільшитись на 20%, на мілководді на 60% і критичному мілководді на 80%;
- при зменшенні параметра η_4 від 0.46 до 0.24 коефіцієнт k_{66} на середній глибині може збільшитись на 400%, на мілководді на 90% і критичному мілководді на 120%;
- при збільшенні коефіцієнту повноти C_B від 0.5 до 0.85 коефіцієнти k_{11} і k_{22} спадають приблизно від 20% на мілководді до 100% на критичному мілководді, коефіцієнт k_{66} навпаки зростає від 40% на середньому мілководді до 150% на критичному мілководді.
- для кожного фіксованого значення T_H , при $C_B \in (0.5; 0.85)$ і $\eta_4 \in (0.24; 0.5)$, коефіцієнт приєданого моменту f_{66} може змінюватись від 45% на середній глибині до 52% при критичному мілководді; дещо менше, але все одно суттєво змінюється коефіцієнт приєднаної маси f_{11} ; коефіцієнт f_{22} може суттєво змінюватись при $T_H > 0.55$ від 15% до 47%.

Коефіцієнти приєднаних мас і моменту безпосередньо входять в ліві частини диференціальних рівнянь динаміки судна (див. наприклад [1 - 8, 20 - 24, 39]), тому застосування отриманих виразів для коефіцієнтів приєднаних мас і моменту, (формули (1), (10) – (12)), здатне суттєво підвищити адекватність математичних моделей плоского руху судна, а отже, як наслідок, уточнити розрахунок траєкторії руху судна на середній воді і мілководді в акваторіях портів і в фарватерах суднохідних каналів і річок.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Першиц Р. Я., *Керованість і управління судном.*: Суднобудування, 1983.

- [2] Соболев Г. В., *Керованість корабля і автоматизація судноводіння*: Суднобудування, 1976.
- [3] Гофман А. Д., *Гребний-рульовий комплекс і маневрування судна: довідник*: Суднобудування, 1988.
- [4] Васильєв А. В., *Керованість суден: навчальний посібник*: Суднобудування, 1989.
- [5] Ремез Ю. В., *Хітавиця корабля*: Суднобудування, 1983, 328 с.
- [6] Павленко В.Г., *Хідкість і керованість суден*. Транспорт, 1991, 397 с.
- [7] Міусов М. В., *Режими роботи і автоматизація пропульсивного комплексу теплохода з вітроподвигунами*. Одеса: ОГМА, ОКФА, 1996.
- [8] Кривий О. Ф., *Методи математичного моделювання в задачах судноводіння*. Одеса: ОНМА, 2015.
- [9] Ogawa A., Koyama T., Kijima K., "MMG report-I: on the mathematical model of ship manoeuvring," *Bull. Soc. Naval Archit. Jpn.*, no. 575, pp. 22–28, 1977. [in Japanese].
- [10] Ogawa A., Kasai H., "On the mathematical method of manoeuvring motion of ships," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 25, no. 292, pp. 306–319, 1978.
- [11] Matsumoto K., Suemitsu K., "The prediction of manoeuvring performances by captive model tests," *J. Kansai Soc. Naval Archit. Jpn.*, no. 176, pp. 11–22, 1980. [in Japanese].
- [12] Inoue S, Hirano M., Kijima K., Takashina J., "A practical calculation method of ship maneuvering motion," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 28, no. 325, pp. 207–222, 1981.
- [13] Inoue S, Hirano M., Kijima K., "Hydrodynamic derivatives on ship manoeuvring," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 28, no. 321, p. 67, 1981.
- [14] Yoshimura Y., Masumoto Y., "Hydrodynamic database and manoeuvring prediction method with medium high-speed merchant ships and fishing vessels," in *Proc. Int. Conf. Marine Simulation and Ship Manoeuvrability (MARSIM 2012)*, 2012, pp. 494–504
- [15] Yoshimura Y., Ma N., "Manoeuvring prediction of fishing vessels," in *Proc. MARSIM '03*, 2003, pp. RC-29-1–RS-29-10.
- [16] Yoshimura Y., Masumoto Y., "Hydrodynamic force database with medium high speed merchant ships including fishing vessels and investigation into a manoeuvring prediction method," *J. Japan Soc. Naval Architects Ocean Eng.*, vol. 14, pp. 63–73, 2011, doi: 10.2534/jjasnaoe.14.6
- [17] Yasukawa H., Yoshimura Y., "Introduction of MMG standard method for ship maneuvering predictions," *J. Mar. Sci. Technol.*, vol. 20, pp. 37–52, 2015, doi: 10.1007/s00773-014-0293-y
- [18] Yasukawa H., Sakuno R., "Application of the MMG method for the prediction of steady sailing condition and course stability of a ship under external disturbances," *J. Mar. Sci. Technol.*, vol. 25, pp. 196–220, 2020, doi: 10.1007/s00773-019-00641-4
- [19] Ayub F.A., Furukawa Y., "Comparison between cubic and quadratic models of hydrodynamic derivatives to the ship course stability index," *Int. J. Technol.*, vol. 15, no. 5, pp. 1502–1523, 2024, doi: 10.14716/ijtech.v15i5.7036
- [20] Кривий О. Ф., Міусов М. В., "Математична модель плаского руху судна за наявності вітродрушіїв", *Судноводіння*, № 26, с. 110–119, 2016.
- [21] Kryvyi O. F., Miyusov M. V., "Construction and analysis of mathematical models of hydrodynamic forces and moment on the ship's hull using multivariate regression analysis," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 15, no. 4, pp. 853–864, 2021, doi: 10.12716/1001.15.04.18

- [22] Kryvyi O. F., Miyusov M. V., "Mathematical model of hydrodynamic characteristics on the ship's hull for any drift angles," in *Advances in Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2019, pp. 111–117, doi: 10.1201/9780429341939
- [23] Kryvyi O., Miyusov M. V., Kryvyi M., "Construction and analysis of new mathematical models of the operation of ship propellers in different maneuvering modes," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 17, no. 1, pp. 853–864, 2023, doi: 10.12716/1001.17.01.09
- [24] Kryvyi O., Miyusov M. V., Kryvyi M., "Analysis of known and construction of new mathematical models of forces on a ship's rudder in an unbounded flow analysis," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 17, no. 4, pp. 831–839, 2023, doi: 10.12716/1001.17.04.09
- [25] Yoshimura Y., Nakamura M., Taniguchi T., and Yasukawa H., "Empirical formulas of hydrodynamic parameters for predicting ship maneuvering based on the MMG-model," *Ocean Eng.*, vol. 337, p. 121831, 2025, doi: 10.1016/j.oceaneng.2025.121831
- [26] Wendel K., "Hydrodynamische Massen und hydrodynamische Massenträgheitsmomente," *Jahrb. Schiffbautechn. Ges.*, vol. 44, pp. 207–255, 1950. [in German].
- [27] Korotkin A. I., *Added Masses of Ship Structures*. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2009, doi: 10.1007/978-1-4020-9432-3
- [28] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia of ships in steering motion," in *Proc. 1st Symp. Ship Manoeuvrability*, David Taylor Model Basin Rep. 1461, Washington, DC, USA, 1960.
- [29] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia for ship motions," *J. Zosen Kiokai*, no. 105, pp. 83–92, 1959. [in Japanese].
- [30] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia for ship motions: part 2. Added mass for the longitudinal motions," *J. Zosen Kiokai*, no. 106, pp. 59–62, 1960. [in Japanese].
- [31] Clarke D. et al., "The application of manoeuvring criteria in hull design using linear theory," in *Spring Meeting of the Royal Institution of Naval Architects*, 1982.
- [32] Hooft J.P., Pieffer J.B.M., "Manoeuvrability of frigates in waves," *Mar. Technol.*, vol. 25, 1988.
- [33] Zhou Z., Yan S., Feng W., "Maneuvering prediction of multiple-purpose cargo ships," *Ship Eng.*, vol. 6, pp. 21–36, 1983. [in Chinese].
- [34] Schneekluth H., and Bertram V., *Ship Design for Efficiency and Economy*, 2nd ed. Oxford, U.K.: Butterworth-Heinemann, 1998
- [35] Sadakane H., Toda Y., Lee Y.-S., "The simplified formulas to predict the coefficients of added mass and yaw added moment of inertia of a ship in shallow water," *J. Japan Inst. Navigation*, pp. 11–20, 2001.
- [36] M. Li and X. Wu, "Simulation calculation and comprehensive assessment on ship maneuverabilities in wind, wave, current and shallow water," in *Proc. MARSIM & ICSM '90*, Tokyo, Japan, 1990, pp. 403–411, 459–465.
- [37] ITTC, "Appendix A: Manoeuvring in shallow and confined waters," in *Proc. 23rd Int. Towing Tank Conf.*, vol. 1, Venice, Italy, 2002, pp. 201–234. [Online]. Available: <https://itc.info/media/8142/23-01.pdf>.
- [38] Amin, O.M., Hasegawa, K., 2010. Generalised mathematical model for ship manoeuvrability considering shallow water effect. In: *Conference Proc*, v. 10. of Japan

Society of Naval Architects and Ocean Engineers, pp. 531–534. <https://www.researchgate.net/publication/281175574>

- [39] Кривий О., Міусов М., Ворохобін М. Визначення приєднаних мас і моментів для плоского руху судна. Судноводіння, випуск. 38, pp. 157–172, 2025. DOI: 10.31653/2306-5761.38.2025.157-172
- [40] O. el Moctar, U. Lantermann, and G. Chilloce, "An efficient and accurate approach for zero-frequency added mass for maneuvering simulations in deep and shallow water," *Appl. Ocean Res.*, vol. 126, Art. no. 103259, 2022, doi: 10.1016/j.apor.2022.103259.

REFERENCES

- [1] Pershyts R. Ya., *Kerovanist i upravlinnia sudnom. Sudnobuduvannia*, 1983.
- [2] Sobolev H. V., *Kerovanist korablia i avtomatyzatsiia sudnovodinnia. Sudnobuduvannia*, 1976.
- [3] Hofman A. D., *Hrebnyi-rulovyi kompleks i manevruvannia sudna: dovidnyk.: Sudnobuduvannia*, 1988.
- [4] Vasyliiev A. V., *Kerovanist suden: navchalnyi posibnyk. Sudnobuduvannia*, 1989.
- [5] Remez Yu. V., *Khytavvytsia korablia. Sudnobuduvannia*, 1983, 328 s.
- [6] Pavlenko V. G., *Khodkost' i upravlyaemost' sudov* [Navigability and controllability of ships]. Transport, 1991.
- [7] Miyusov M. V., *Modes of operation and automation of motor vessel propulsion unit with wind propulsors*. Odesa, Ukraine: OGMA; OKFA, 1996.
- [8] Kryvyi O. F., *Methods of mathematical modeling in navigation*. Odesa, Ukraine: ONMA, 2015. [in Ukrainian].
- [9] Ogawa A., Koyama T., Kijima K., "MMG report-I: on the mathematical model of ship manoeuvring," *Bull. Soc. Naval Archit. Jpn.*, no. 575, pp. 22–28, 1977. [in Japanese].
- [10] Ogawa A., Kasai H., "On the mathematical method of manoeuvring motion of ships," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 25, no. 292, pp. 306–319, 1978.
- [11] Matsumoto K., Suemitsu K., "The prediction of manoeuvring performances by captive model tests," *J. Kansai Soc. Naval Archit. Jpn.*, no. 176, pp. 11–22, 1980. [in Japanese].
- [12] Inoue S, Hirano M., Kijima K., Takashina J., "A practical calculation method of ship maneuvering motion," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 28, no. 325, pp. 207–222, 1981.
- [13] Inoue S, Hirano M., Kijima K., "Hydrodynamic derivatives on ship manoeuvring," *Int. Shipbuild. Prog.*, vol. 28, no. 321, p. 67, 1981.
- [14] Yoshimura Y., Masumoto Y., "Hydrodynamic database and manoeuvring prediction method with medium high-speed merchant ships and fishing vessels," in *Proc. Int. Conf. Marine Simulation and Ship Manoeuvrability (MARSIM 2012)*, 2012, pp. 494–504
- [15] Yoshimura Y., Ma N., "Manoeuvring prediction of fishing vessels," in *Proc. MARSIM '03*, 2003, pp. RC-29-1–RS-29-10.
- [16] Yoshimura Y., Masumoto Y., "Hydrodynamic force database with medium high speed merchant ships including fishing vessels and investigation into a manoeuvring prediction method," *J. Japan Soc. Naval Architects Ocean Eng.*, vol. 14, pp. 63–73, 2011, doi: 10.2534/jjasnaoe.14.6
- [17] Yasukawa H., Yoshimura Y., "Introduction of MMG standard method for ship maneuvering predictions," *J. Mar. Sci. Technol.*, vol. 20, pp. 37–52, 2015, doi: 10.1007/s00773-014-0293-y
- [18] Yasukawa H., Sakuno R., "Application of the MMG method for the prediction of

- steady sailing condition and course stability of a ship under external disturbances," *J. Mar. Sci. Technol.*, vol. 25, pp. 196–220, 2020, doi: 10.1007/s00773-019-00641-4
- [19] Ayub F.A., Furukawa Y., "Comparison between cubic and quadratic models of hydrodynamic derivatives to the ship course stability index," *Int. J. Technol.*, vol. 15, no. 5, pp. 1502–1523, 2024, doi: 10.14716/ijtech.v15i5.7036
- [20] Kryvyi O. F., Miyusov M. V., "Mathematical model of movement of the vessel with auxiliary wind-propulsors," *Shipping & Navigation*, vol. 26, pp. 110–119, 2016.
- [21] Kryvyi O. F., Miyusov M. V., "Construction and analysis of mathematical models of hydrodynamic forces and moment on the ship's hull using multivariate regression analysis," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 15, no. 4, pp. 853–864, 2021, doi: 10.12716/1001.15.04.18
- [22] Kryvyi O. F., Miyusov M. V., "Mathematical model of hydrodynamic characteristics on the ship's hull for any drift angles," in *Advances in Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2019, pp. 111–117, doi: 10.1201/9780429341939
- [23] Kryvyi O., Miyusov M. V., Kryvyi M., "Construction and analysis of new mathematical models of the operation of ship propellers in different maneuvering modes," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 17, no. 1, pp. 853–864, 2023, doi: 10.12716/1001.17.01.09
- [24] Kryvyi O., Miyusov M. V., Kryvyi M., "Analysis of known and construction of new mathematical models of forces on a ship's rudder in an unbounded flow analysis," *TransNav, Int. J. Marine Navigation Saf. Sea Transp.*, vol. 17, no. 4, pp. 831–839, 2023, doi: 10.12716/1001.17.04.09
- [25] Yoshimura Y., Nakamura M., Taniguchi T., and Yasukawa H., "Empirical formulas of hydrodynamic parameters for predicting ship maneuvering based on the MMG-model," *Ocean Eng.*, vol. 337, p. 121831, 2025, doi: 10.1016/j.oceaneng.2025.121831
- [26] Wendel K., "Hydrodynamische Massen und hydrodynamische Massenträgheitsmomente," *Jahrb. Schiffbautechn. Ges.*, vol. 44, pp. 207–255, 1950. [in German].
- [27] Korotkin A. I., *Added Masses of Ship Structures*. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2009, doi: 10.1007/978-1-4020-9432-3
- [28] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia of ships in steering motion," in *Proc. 1st Symp. Ship Manoeuvrability*, David Taylor Model Basin Rep. 1461, Washington, DC, USA, 1960.
- [29] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia for ship motions," *J. Zosen Kiokai*, no. 105, pp. 83–92, 1959. [in Japanese].
- [30] Motora S., "On the measurement of added mass and added moment of inertia for ship motions: part 2. Added mass for the longitudinal motions," *J. Zosen Kiokai*, no. 106, pp. 59–62, 1960. [in Japanese].
- [31] Clarke D. et al., "The application of manoeuvring criteria in hull design using linear theory," in *Spring Meeting of the Royal Institution of Naval Architects*, 1982.
- [32] Hoof J.P., Pieffer J.B.M., "Manoeuvrability of frigates in waves," *Mar. Technol.*, vol. 25, 1988.
- [33] Zhou Z., Yan S., Feng W., "Maneuvering prediction of multiple-purpose cargo ships," *Ship Eng.*, vol. 6, pp. 21–36, 1983. [in Chinese].

- [34] Schneekluth H., and Bertram V., *Ship Design for Efficiency and Economy*, 2nd ed. Oxford, U.K.: Butterworth-Heinemann, 1998.
- [35] Sadakane H., Toda Y., Lee Y.-S., "The simplified formulas to predict the coefficients of added mass and yaw added moment of inertia of a ship in shallow water," *J. Japan Inst. Navigation*, pp. 11–20, 2001.
- [36] M. Li and X. Wu, "Simulation calculation and comprehensive assessment on ship maneuverabilities in wind, wave, current and shallow water," in Proc. MARSIM & ICSM '90, Tokyo, Japan, 1990, pp. 403–411, 459–465.
- [37] ITTC, "Appendix A: Manoeuvring in shallow and confined waters," in *Proc. 23rd Int. Towing Tank Conf.*, vol. 1, Venice, Italy, 2002, pp. 201–234.
- [38] Amin, O.M., Hasegawa, K., 2010. Generalised mathematical model for ship manoeuvrability considering shallow water effect. In: Conference Proc, v. 10. of Japan Society of Naval Architects and Ocean Engineers, pp. 531–534. <https://www.researchgate.net/publication/281175574>
- [39] Kryvyi O.F., Miyusov M.V., Vorokhobin M.I., "Determination of added masses and moments for the planar motion of a ship" *Shipping & Navigation*, vol. 38, pp. 157–172, 2025.. DOI: 10.31653/2306-5761.38.2025.157-172
- [40] O. el Moctar, U. Lantermann, and G. Chillece, "An efficient and accurate approach for zero-frequency added mass for maneuvering simulations in deep and shallow water," *Appl. Ocean Res.*, vol. 126, Art. no. 103259, 2022, doi: 10.1016/j.apor.2022.103259.