УДК 656.61.052

MATHEMATICAL MODELLING OF SHIP'S RUDDERS OPERATION UNDER VARIOUS MANEUVERING MODES

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ СУДНОВИХ СТЕРН ПРИ РІЗНИХ РЕЖИМАХ МАНЕВРУВАННЯ

O.F. Kryvyi, D.Sc., professor, M.V. Miyusov, D.Sc., professor, M.O. Kryvyi, PhD. student

О.Ф. Кривий, д.ф.-м.н., професор, М.В. Міюсов, д.т.н., професор, М.О. Кривий, аспірант

National University "Odessa Maritime Academy", Ukraine Національний університет «Одеська морська академія», Україна

ABSTRACT

The availability of adequate mathematical models of the ship propulsion system is essential for developing effective ship control systems, building high-quality simulators, and studying the ship's maneuvering behavior. With the advancement of new computing and information technologies, the mathematical models of the ship propulsion system need to meet higher requirements and cover wider applications. This leads to the need for continuous improvement of mathematical models, especially those of non-inertial forces acting on the ship.

This work investigates the influence of the ship's curvilinear movement on the rudder performance. Mathematical models of the forces and moments acting on the rudder at different values of the local drift angle and the rudder angle are derived. The resultant force on the rudder is decomposed into components due to the rudder lift, drag, normal force, and tangential force. Expressions for the coefficients of rudder hydrodynamic quality, reverse quality, and normal force are obtained. The existing mathematical models of the rudder hydrodynamic coefficients are analyzed and their limitations and applicability are discussed. New mathematical models of the rudder lift and drag coefficients are proposed, which take into account the aspect ratio, relative thickness, and angle of attack of the rudder. The proposed models are validated by comparing them with experimental data for NACA series rudders. t is shown how the lift and drag of the rudder, as well as the components of the resulting force, change for the maximum possible range of changes in the local drift angle and the rudder angle, for different values of the rudder aspect ratio and relative thickness.

Keywords: mathematical models, ship rudders, curvilinear movement, longitudinal and transverse components of forces, dimensionless hydrodynamic coefficients.

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Розробка ефективних систем керування судна, побудова якісних тренажерів, дослідження поведінки судна в процесі маневрування обумовлює наявність адекватних математичних моделей пропульсивного суднового комплексу. Розвиток нових обчислювальних та інформаційних технологій призводить до розширення області застосування математичних моделей пропульсивного комплексу судна і, одночасно, до зростання вимог, які до них висуваються. Останнє, в свою чергу, призводить до необхідності постійного вдосконалення математичних моделей, зокрема, математичних моделей неінерційних сил, що діють на судно.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і виділення невирішених раніше частин загальної проблеми

Побудові і застосуванню математичних моделей пропульсивного суднового комплексу присвячено багато робіт [1 - 23]. Детальний аналіз цих досліджень зроблений, наприклад, в роботах [5, 6, 24, 30], де, зокрема, наведений аналіз недоліків існуючих математичних моделей для гідродинамічних сил викликаних роботою гребного гвинта.

Однією із важливих складових неінерційних сил і моментів, що діють на судно, є сили і моменти викликані роботою суднових стерн, дослідженню яких, зокрема, присвячені роботи [25-32]. Дослідження роботи суднових стерн базується на обробці експериментальних даних модельних і натурних випробувань [2, 3, 26 - 29]. В останній час, у зв'язку із швидким розвитком методів обчислювальної гідродинаміки CFD (Computational Fluids Dynamics methods), до розв'язання вказаної проблеми почали широко застосовувати метод RANS (the Reynolds-Averaged Navier-Stokes method) [27, 30, 31]. Обидва підходи доповнюють один одного і використовуються для визначення розподілу гідродинамічних сил на стернах, що є основою для отримання математичних моделей цих сил з подальшим їх врахуванням в загальних математичних моделях пропульсивного комплексу судна. Для побудови математичних моделей суднових стерн на першому етапі необхідно мати адекватні математичні моделі гідродинамічних сил на ізольованому стерні в необмеженому потоці. Відомі і отримали широке застосування, в основному, лінійні наближення вказаних сил [2, 3, 7 - 17], які використовують тільки першу гідродинамічну похідну і достатньо точно описують їх поведінку при малих кутах атаки потоку на стерно, але при цьому не враховують, зокрема, дотичну (тангенціальну) складову результуючої сили. Відомі також подання [3, 29] компонент результуючої гідродинамічної сили на стерні, які використовують тригонометричні функції кута атаки, але вони потребують уточнення і подальшого розвитку.

Отже, не зважаючи на значний розвиток в останній час математичних моделей пропульсивного комплексу судна, багато проблем потребують подальшого вирішення. Зокрема, побудова адекватних математичних моделей, які б враховували всі складові сили і моменту на стерні судна і були б зручними при числовому моделюванні для максимально можливої області зміни місцевого кута дрейфу та кута перекладки стерна

Формулювання цілей статті (постановка задачі)

Мета даної роботи – побудова і числовий аналіз адекватних математичних моделей сил, викликаних роботою суднових стерн, які б з одного боку охоплювали достатньо широку область зміни кінематичних параметрів руху судна, а з іншого були зручні для застосування при розв'язанні різних задач динаміки пропульсивного комплексу судна. Слід відмітити, що математичні моделі роботи суднового стерна є багаторівневими моделями, які включають низку параметрів, кожний із яких визначається на основі експериментальних досліджень або за допомогою методів RANS. Одними із основних серед цих параметрів є безрозмірні гідродинамічні коефіцієнти сил і моментів на стерні, визначення яких є вирішальним для побудови математичних моделей роботи суднового стерна.

Викладення матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів

1. Технічні і кінематичні параметри судна і стерна

Геометричні і технічні характеристики судна і стерна будемо позначим так: L – довжина судна по ватерлінії; B – ширина судна по діючу ватерлінію; T – осадка судна на міделі, ρ – масова густина морської води, C_b – коефіцієнт загальної повноти судна; $W = C_b LBT$ – об'ємна водотоннажність судна; $S = LT\sigma_D$ – приведена площина зануреної частини діаметральної площини судна; σ_D – приведений коефіцієнт повноти зануреної частини для діаметральної площини.

На сучасних суднах, в залежності від їх призначення, використовуються різні типи стерн. На торгових суднах дальнього плавання, зазвичай, використовують одиночні стерна за одиночними гребними гвинтами, які розміщені в діаметральній площині. Стерна можуть відрізнятись по виду проекції на діаметральну площину: прямокутні або трапецієвидні; по способу кріплення: багато опорні, двохопорні, напівпідвісні, підвісні; по формі профілю: NACA, ЦАГІ, НЕЖ, HSVA, IFS, Wedge та ін., детальна їх класифікація викладена, зокрема, в роботах [1 – 3, 29,30].

Зупинимось детально на тих характеристиках суднових стерн, які використовуються при побудові математичних моделей гідродинамічних сил на стерні. До основних характеристик належить площа пера стерна S_R , тобто площа обмежена контуром проекції стерна на

діаметральну площину, а також відносна площа пера стерна $\tilde{S}_R = \frac{S_R}{LT}$. Для ефективного

керування судном, в залежності від цілей, відносна площа пера стерна повинна, принаймні, задовольняти умові [29, 30, 32]

$$\tilde{S}_{R} \ge 0.01 + 0.5C_{b}^{2} \left(\frac{B}{L}\right)^{2}.$$
 (1)

При побудові математичних моделей гідродинамічних сил і моментів, важливо, перевіряти виконання умови (1). Для деяких типів комерційних суден в таблиці 1 наведені рекомендовані значення \tilde{S}_R в процентному вимірі.

Тип судна	Контейнеровози	Пасажирські	Одно стернові	Великі	Нафтові
		лайнери	вантажні судна	вантажні	танкери та
				судна	балкери
$\tilde{S}_R \cdot 100\%$	1.2÷1.7%	1.2÷1.9%	1.6÷1.8%	2÷2.8%	1.8÷2.2%

Таблиця 1. Рекомендовані значення відносної площі стерна для різних типів суден

До лінійних геометричних характеристик суднових стерн відносяться: його висота (розмах) h_R , тобто найбільша відстань між нижнім та верхніми краями стерна, а також хорда стерна b_R , тобто відстань між переднім краєм (носиком) і його заднім краєм (хвостиком). Для не прямокутного в плані стерна, наприклад трапецієвидного, в якості середньої хорди застосовується велична: $b_{Rc} = \frac{S_R}{h_R}$. Використовують також значення відносної товщина

 $\tilde{t}_R = \frac{t_R}{b_{Rc}}$, де t_R – максимальна товщина пера стерна. В сучасних комерційних суднах дальнього

плавання, зазвичай, використовують стернові профілі NASA-0012, NASA-0015, NACA-0018, NACA-0020, NACA-0025, які відповідають значенням параметра \tilde{t}_R : 0.12; 0.15; 0.18; 0.20; 0.25. До важливих параметрів суднового стерна також відноситься подовження стерна: $\Lambda_R = \frac{h_R^2}{S_R} = \frac{h_R}{b_R}$, яке показує в скільки разів розмах стерна більше (або менше) хорди. Для

морських торгових суден цей показник становить 1.5÷3, для суден внутрішнього плавання 1.0÷2.0. Для деяких типів суден він може бути і меншим одиниці, зокрема, для суден із малою осадкою. В таблиці 2 наведені основні технічні характеристики корпусів і стерн для деяких типів комерційних суден.

Судно	KCS,	KVLCC2	VLCC,	VLGC,	LPG,
	контейнеровоз	танкер	танкер	танкер	танкер
			ESS0		
N⁰	2	3	4	5	6
L [м]	230	320	325	226	147
В [м]	32.2	58	53	36.6	25.5
$T[\mathcal{M}]$	10.8	20,8	21.79	11.8	8.8
C_B	0.651	0,8098	0.831	0.72	0.7403
$h_R[M]$	9.9	14.32	9.0	9.65	6.7
$b_{Rc}[M]$	5.5	7.84	5.84	4.76	2.87
\tilde{S}_R (%)	1.821	1.6866	1.69	1.7224	1.484
Λ_R	1.8	1.827	1.54	2.0272	2.34
$S_R \left[M^2 \right]$	54.45	115.04	119.82	45.934	19.2

						•	
	, ,	OV11111111	nanaua	mmi	cudau	1 cmon	
		$P_{\lambda}HIYHI$	nunumen	111111	UVUPH	$I \cup M \in M$	н.
1 0000000000 -		0.00000000000	i verp ets i ver	inp w	0,000	i enicepi	٠
,			1	-	*		

Важливим параметром роботи суднового стерна є також кут перекладки стерна δ , тобто кут відхилення стерна від діаметральної площини судна. Кут перекладки стерна, зазвичай вважають додатнім, якщо він відкладається проти часової стрілки від діаметральної площини. Максимальне значення цього кута обмежене конструктивними особливостями судна і, зазвичай, для торгових суден $|\delta_{max}| = 35^{\circ}$. Це слід враховувати при математичному моделюванні роботи суднових стерн.

На роботу суднового стерна також впливає значення безрозмірного числа Рейнольдса на стерні: $\text{Re} = \frac{v_R b_{Rc}}{\mu}$, де v_R – швидкість набігання потоку на стерно, μ – кінематична в'язкість забортної води. Виходячи із визначення числа Re, його значення для кожного конкретного судна залежить від швидкості судна і знаходиться в діапазоні $2 \cdot 10^5 \div 10^7$.

2. Гідродинамічні сили і момент на стерні судна при криволінійному русі

Розглянемо стерно, яке розташоване в діаметральній площині за гвинтом судна при плоскому криволінійному русі судна. Судно рухається із швидкістю \vec{v} , величина якої $v = |\vec{v}|$, під кутом дрейфу β до діаметральної площини. Швидкість \vec{v} можна розглядати як швидкість натікання потоку на судно під кутом β до діаметральної площини. Має місце також поворот судна навколо осі Z, яка проходить через центр тяжіння судна G, перпендикулярно до горизонтальної діаметральної площини судна. Величину швидкості повороту, тобто величину кутової швидкості, позначимо ω_z . За рахунок повороту судна навколо осі GZ, впливу корпусу і гвинта зміниться величина швидкості і кут натікання потоку на стерно (місцевий кут дрейфу), які позначимо відповідно v_R і β_R . Для їх визначення можна, скористатись, наприклад, результатами робіт [1 – 3, 7, 9].

Для побудови математичної моделі роботи стерна, введемо дві системи декартових координат (рис. 1). Перша, пов'язана із судном ліва система GXYZ, де вісь X направимо на ніс судна, вісь Y, перпендикулярно на правий борт. Друга, права система $DX_*Y_*Z_*$ пов'язана із стерном, в якій D-точка дії результуючої гідродинамічної сили на стерні, вісь Z_* паралельно осі повороту стерна, при цьому $Z \uparrow \downarrow Z_*$. В обох системах координат кут дрейфу β і кут перекладки стерна δ будуть додатними, якщо вони відкладаються проти часової стрілки, циркуляція при цьому буде додатною на правий борт.

Зауважимо, що використання, поряд із системою GXYZ, додаткової систем координат $DX_*Y_*Z_*$, пов'язане із зручністю побудови математичних моделей ізольованого стерна в необмеженому просторі і є усталеною практикою [1,3, 7 – 11, 25 30].



Рис. 1. Сили на судновому стерні

Нехай $\vec{P}_R = \vec{X}_R + \vec{Y}_R = X_R \vec{i} + Y_R \vec{j}$ результуюча сила, яка виникає на стерні після перекладки його на кут δ , в системі координат *GXYZ*, а M_R – величенна моменту, який повертає судно навколо осі Z. Компоненти X_R і Y_R пов'язані із проекціями P_X і P_Y результуючої сили $\vec{P}_{R_*} = \vec{P}_{Y_*} + \vec{P}_{X_*} = P_X \vec{i} + P_Y \vec{j}$ для відповідного ізольованого стерна в необмеженому потоці, в системі координат $DX_*Y_*Z_*$. Для того щоб отримати цей зв'язок необхідно врахувати наступне:

- 1. Оскільки осі X_* , Y_* і осі X і Y направлені протилежно то, компоненти P_X і P_Y результуючої сили \vec{P}_{R^*} , в системі координат $D_*X_*Y_*Z_*$, пов'язаній із стерном, і компоненти X_R і Y_R результуючою сили \vec{P}_R в системі координат *GXYZ*, пов'язаній із судном, мають протилежні знаки.
- 2. Перекладка стерна на кут δ викликає зміну тиску в кормовій частині судна, що призводить, до появи додаткової бічної гідродинамічної сили динамічної взаємодії [3, 7], із результуючою бічною складовою: $\vec{Y}_R^a = a_H \vec{Y}_R$, де a_H коефіцієнт, додаткової бічної сили (Ratio of additional lateral force). Ця сила, як показано на Рис. 1, прикладена на відстані x_H (в корму) від центру, в пов'язаній із судном декартовій системі координат *GXYZ*.
- Вплив корпусу судна на стерно визначається коефіцієнтом додаткової сили (коефіцієнтом засмоктування) [3, 7, 8] ζ_R (Steering resistance deduction factor, coefficient for additional drag), і враховується в повздовжній складовій результуючої сили.

З урахуванням сказаного отримаємо наступні вирази для компонент результуючої сили \vec{P}_R і моменту M_R на стерні в системі координат пов'язаній із судном:

$$\begin{cases}
X_{R} = -(1 - \zeta_{R})P_{X} \\
Y_{R} = -(1 + a_{H})P_{Y} ; \\
M_{R} = -(x_{R} + a_{H}x_{H})P_{Y}
\end{cases}$$
(2)

де $x_R = \tilde{x}_R \cdot L < 0$, \tilde{x}_R – безрозмірна повздовжня координата положення керма, для основних типів суден належить інтервалу: $\tilde{x}_R \in (-0.48; -0.6)$. При цьому повинна виконуватись нерівність $\tilde{x}_R < \tilde{x}_P$, де \tilde{x}_P – безрозмірна повздовжня координата положення гвинта.

Значення коефіцієнту додаткової бічної сили (ratio of additional lateral force) a_H , зазвичай, належить діапазону $0.3 \div 0.6$, для його обчислення, зокрема, можна скористатись наступною емпіричною формулою [7, 8]

$$a_H = 2.0802C_B^2 - 0.6124C_B - 0.0569, \qquad (3)$$

або поданням [10]

$$a_H = a_0 C_B \frac{B}{L},\tag{4}$$

де $a_0 = 3.6$ для океанських комерційних суден і $a_0 = 1.2$ для риболовних суден. Відомі також наступні формули [33, 34]

$$a_H = 3.349C_B^2 - 3.293C_B + 1.059, \qquad (5)$$

$$a_H = 2.78C_B - 1.922, \tag{6}$$

Значення відносного положення \tilde{x}_H , ($\tilde{x}_H = x_H / L < 0$) додаткової бічної сили для усіх типів суден належить проміжку $\tilde{x}_H \in (-0.3; -0.6)$. Для його обчислення можна скористатись розвиненням [7, 8]

$$\tilde{x}_H = 9.5727 C_B^2 - 8.0704 C_B - 0.0618 \,. \tag{7}$$

Відома також формула [34]

$$\tilde{x}_{H} = -148.44 \left(\frac{B}{L}\right)^{2} + 58.18 \frac{B}{L} - 6.054 .$$
(8)

Для обчислення безрозмірного коефіцієнту ζ_R можна скористатись формулою[7, 8]

$$\zeta_R = -0.28C_B + 0.45\,,\tag{9}$$

або розвиненням [33]

$$\zeta_R = -0.629C_B^2 + 0.605C_B + 0.129.$$
⁽¹⁰⁾

Компоненти результуючої сили \vec{P}_R і моменту, зазвичай, подають так

Судноводіння | Shipping & Navigation ISSN 2306-5761 | 2618-0073

$$Y_R = C_{YR} \frac{\rho v_R^2 S_R}{2}, \ X_R = C_{XR} \frac{\rho v_R^2 S_R}{2}, \ M_R = C_{MR} \frac{\rho v_R^2 S_R}{2}$$
(11)

де ρ – густина забортної води. C_{YR} , C_{XR} , C_{MR} - безрозмірні гідродинамічні коефіцієнти відповідно повздовжньої, поперечної сил і моменту на судновому стерні.

Для безрозмірних гідродинамічних коефіцієнтів отримаємо, урахуванням співвідношень (11) і подань (2), наступні представлення:

$$C_{XR} = -(1 - \zeta_R) C_{XR}^*$$

$$C_{YR} = -(1 + a_H) C_{YR}^* \quad . \tag{12}$$

$$C_{MR} = -(\tilde{x}_R + a_H \tilde{x}_H) C_{YR}^*$$

У виразах (12) C_{YR}^* , C_{XR}^* - безрозмірні гідродинамічні коефіцієнти відповідно повздовжньої і поперечної сил на ізольованому стерні в необмеженому потоці.

Отже, для завершення побудови математичної моделі роботи суднового стерна, потрібно мати подання для C_{YR}^* , C_{XR}^* .

3. Гідродинамічні сили на ізольованому стерні в необмеженому потоці

Розглянемо гідродинамічні сили на ізольованому стерні в необмеженому потоці, тобто на стерні на яке не впливають корпус судна і гребний гвинт, в системі координат $DX_*Y_*Z_*$, пов'язаній із стерном (рис. 2). Результуюча сила \vec{P}_{R_*} на стерні виникає за рахунок перекладки стерна на кут δ і натікання потоку на стерно із швидкістю \vec{v}_R під кутом β_R до осі X_* . Кут атаки на стерно називають кут між хордою стерна і напрямом потоку, що натікає на стерно, тобто різницю кута перекладки стерна і місцевого кута дрейфу (рис. 2):

$$\alpha_R = \delta - \beta_R \,. \tag{13}$$

Якщо кут атаки α_R є додатнім, то відхилення хорди стерна від лінії натікання потоку відбувається проти годинникової стрілки, в протилежному випадку по годинниковій стрілці.

В плоскій декартовій системі координат X_*DY_* результуюча сила на стерні \vec{P}_{R_*} допускає розвинення:

$$\vec{P}_{R_*} = \vec{P}_{Y_*} + \vec{P}_{X_*} = P_X \vec{i} + P_Y \vec{j} , \qquad (14)$$

де \vec{i} і \vec{j} орти у цій системі координат. Згідно поданням (2), величини повздовжньої P_X і поперечної P_Y складових результуючої сил на стерні використовують для побудови математичних моделей роботи суднового стерна і тому підлягають визначенню. Зазвичай, компоненти P_X і P_Y подають через величину підйомної сили P_L і сили опору на стерні P_D , або величини нормальної сили P_N і дотичної (тангенціальної) сили P_S на стерні. Встановимо зв'язок між вказаними величинами, для цього розглянемо ще дві декартові системи координат, які пов'язані із стерном: L_*DD_* і N_*DS_* . Перша із цих систем утворена поворотом системи X_*DY_* на кут β_R , друга на кут δ проти годинникової стрілки (див. Рис.2).



Рис. 2. Сили на ізольованому стерні в необмеженому потоці

Результуюча сила \vec{P}_{R_*} в утворених системах координат допускає наступні розвинення: ***** в системі координат L_*DD_* :

$$\vec{P}_{R^*} = \vec{P}_L + \vec{P}_D = P_L \vec{i} + P_D \vec{j} , \qquad (15)$$

 \bullet в системі координат N_*DS_*

$$\vec{P}_{R^*} = \vec{P}_N + \vec{P}_S = P_N \vec{i} + P_S \vec{j} , \qquad (16)$$

У формулах (15) - (16) \vec{i} і \vec{j} орти у відповідній системі координат. Розвинення (14) – (16) і формули перетворення при повороті осей координат, дають можливість виразити величини повздовжньої і поперечної складових рівнодійної сили \vec{P}_{R_*} через компоненти P_L, P_D і P_N, P_S :

$$\begin{cases} P_X = \sin\beta_R \cdot P_L + \cos\beta_R \cdot P_D \\ P_Y = \cos\beta_R \cdot P_L - \sin\beta_R \cdot P_D \end{cases},$$
(17)

$$\begin{cases} P_X = \sin \delta \cdot P_N + \cos \delta \cdot P_S \\ P_Y = \cos \delta \cdot P_N - \sin \delta \cdot P_S \end{cases}$$
(18)

Між компонентами P_L, P_D і P_N, P_S також не важко встановити наступний зв'язок

$$\begin{cases} P_D = \sin \alpha_R \cdot P_L + \cos \alpha_R \cdot P_S \\ P_L = \cos \alpha_R \cdot P_N - \sin \alpha_R \cdot P_S \end{cases}, \tag{19}$$

При дослідженні гідродинамічних сил на стерні судна, зазвичай [1 3, 7], вводять безрозмірні гідродинамічні коефіцієнти бічної та повздовжньої сил, підйомної сили та сили опору, а також нормальної і дотичної сил на судновому стерні:

Судноводіння | Shipping & Navigation ISSN 2306-5761 | 2618-0073

$$C_{YR}^{*} = \frac{2P_Y}{\rho v_R^2 S_R}, \ C_{XR}^{*} = \frac{2P_X}{\rho v_R^2 S_R},$$

$$C_{LR} = \frac{2P_L}{\rho v_R^2 S_R}, \ C_{DR} = \frac{2P_D}{\rho v_R^2 S_R},$$

$$C_{NR} = \frac{2P_N}{\rho v_R^2 S_R}, \ C_{SR} = \frac{2P_S}{\rho v_R^2 S_R}.$$
(20)

При цьому безрозмірний коефіцієнт результуючої сили можна подати так

$$C_R = \frac{\left|\vec{P}_{R^*}\right|}{\rho v_R^2 S_R} = \sqrt{(C_{YR}^*)^2 + (C_{XR}^*)^2} = \sqrt{C_{LR}^2 + C_{DR}^2} = \sqrt{C_{NR}^2 + C_{SR}^2} \,. \tag{21}$$

3 урахуванням подань (20), співвідношення (17) - (19) перепишемо так

$$\begin{cases} C_{XR}^* = \sin\beta_R \cdot C_{LR} + \cos\beta_R \cdot C_{DR} \\ C_{YR}^* = \cos\beta_R \cdot C_{LR} - \sin\beta_R \cdot C_{DR} \end{cases},$$
(22)

$$\begin{cases} C_{XR}^* = \sin \delta \cdot C_{NR} + \cos \delta \cdot C_{SR} \\ C_{YR}^* = \cos \delta \cdot C_{NR} - \sin \delta \cdot C_{SR} \end{cases}.$$
(23)

$$\begin{cases} C_{DR} = \sin \alpha_R \cdot C_{NR} + \cos \alpha_R \cdot C_{SR} \\ C_{LR} = \cos \alpha_R \cdot C_{NR} - \sin \alpha_R \cdot C_{SR} \end{cases}.$$
(24)

Відношення $k_L = \frac{P_L}{P_D} = \frac{C_{LR}}{C_{DR}}$ називається коефіцієнтом гідродинамічної якості пера стерна [1 – 3], а обернена величина: $k_D = \frac{1}{k_L}$ називається коефіцієнтом зворотної якості пера стерна. Введемо також коефіцієнт тангенціальної сили $k_S = \frac{C_{SR}}{C_{NR}}$, який визначає вплив дотичної складової сили на перо стерна. Коефіцієнти k_L , k_D і k_S залежать від подовження пера стерна Λ_R .

Встановимо зв'язок між коефіцієнтами k_L , k_D і k_S , для цього поділивши другу рівність в (24) на першу, отримаємо

$$k_L = \frac{\cos \alpha_R \cdot C_{NR} - \sin \alpha_R \cdot C_{SR}}{\sin \alpha_R \cdot C_{NR} + \cos \alpha_R \cdot C_{SR}} = \frac{\cos \alpha_R - k_S \sin \alpha_R}{\sin \alpha_R + k_S \cos \alpha_R},$$
(25)

Звідси отримаємо наступний зв'язок

$$k_{S} = \frac{\cos \alpha_{R} - k_{L} \sin \alpha_{R}}{\sin \alpha_{R} + k_{L} \cos \alpha_{R}}.$$
(26)

Нехай де φ_D і φ_N кути відповідно між вектором \vec{P}_D і \vec{P}_N та результуючим вектором \vec{P}_{R_*} , (див. рис.2), тоді $\operatorname{tg} \varphi_D = k_L$, $\operatorname{tg} \varphi_N = k_S$. Використавши формули (14), (15), отримаємо подання

$$k_L = -\operatorname{ctg}(\alpha_R + \varphi_N), \ k_S = -\operatorname{ctg}(\alpha_R + \varphi_D).$$
⁽²⁷⁾

Коефіцієнти k_L , k_D і k_S дають можливість розвинення (28) (30) подати так

$$\begin{cases} C_{XR}^* = C_{LR} \cdot (\sin \beta_R + k_D \cos \beta_R) \\ C_{YR}^* = C_{LR} \cdot (\cos \beta_R - k_D \sin \beta_R) \end{cases};$$
(28)

$$\begin{cases} C_{XR}^* = C_{NR} \left(\sin \delta + k_S \cos \delta \right) \\ C_{YR}^* = C_{NR} \left(\cos \delta - k_S \sin \delta \right); \end{cases}$$
(29)

$$\begin{cases} C_{DR} = C_{NR} (\sin \alpha_R + k_S \cos \alpha_R) \\ C_{LR} = C_{NR} (\cos \alpha_R - k_S \sin \alpha_R) \end{cases}.$$
(30)

Із рисунка 2 легко встановити, що кут між вектором результуючої гідродинамічної сили \vec{P}_{R_*} і вектором \vec{P}_{Y_*} дорівнює сумі кута перекладки стерна δ і кута ϕ_N . Це дає можливість безрозмірні коефіцієнти бічної та повздовжньої сил стерна подати через безрозмірний коефіцієнт результуючої сили C_R :

$$\begin{cases} C_{XR}^* = C_R \sin(\delta + \varphi_N) \\ C_{YR}^* = C_R \cos(\delta + \varphi_N) \end{cases}$$
(31)

Отже, для визначення безрозмірних гідродинамічні коефіцієнти бічної та повздовжньої сили C_{YR}^* і C_{XR}^* на стерні можна скористатись наступними трьома підходами:

- Скористатись поданнями (22) або (28), якщо відомі математичні моделі для коефіцієнтів підйомної сили C_{LR} та опору C_{DR} стерна, (або замість C_{DR}, коефіцієнт зворотної якості стерна k_D);
- Скористатись поданнями (23) або (29), якщо відомі математичні моделі для коефіцієнтів нормальної сили C_{NR} та тангенціальної сили C_{SR} на стерні, (або замість C_{SR}, коефіцієнт тангенціальної сили k_S);
- Скористатись поданнями (21), (31) якщо відомі математичні моделі для P_L, P_D, або для P_N, P_S.

4. Аналіз існуючих і побудова нових математичних моделей гідродинамічних коефіцієнтів стерна

При побудові математичних моделей суднових стерн, важливо враховувати критичне значення кута атаки на стерно α_{Rk} , тобто кут атаки при якому настає зрив потоку на пері

стерна і настає різке зменшення його підйомної сили. Значення кута α_{*Rk*} залежить від технічних характеристик стерна, наближено в градусах цей кут можна визначити за формулою

$$\alpha_{Rk} \approx \frac{1}{\sqrt{h_R}} \begin{cases} 33^{\circ}, & h_R < 1.5 \\ 30^{\circ}, & h_R \ge 1.5 \end{cases}$$

Множину значень кутів атаки: $|\alpha_R| \leq \alpha_{Rk}$ називають докритичною, а множину значень: $|\alpha_R| > \alpha_{Rk}$ називають закритичною. Кути $\pm \alpha_{Rk}$ э фактично кутами максимального значення коефіцієнту підйомної сили стерна C_{LR} , при цьому кут максимальної ефективності має дещо менше значення, за рахунок зростання коефіцієнт опору стерна C_{DR} . Слід також відмітити, що значення кута α_{Rk} для стерна, що знаходиться в потоці гребного гвинта збільшується в середньому на 15° ÷ 20°. Така ж поведінка характерна і для коефіцієнта нормальної сили C_{NR} . Скориставшись результатами експериментальних досліджень [2 - 3], можна отримати залежність значень критичного кута атаки від подовження стерна Λ_R . В таблиці 1 наведена вказана залежність для стерна NACA-0020.

Таблиця 3. Залежність значення критичного кута атаки $lpha_{Rk}$ від подовження стерна Λ_R

Λ_R	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2	3	5
α_{Rk}	49°	45.5°	41°	36°	30.5°	25.5°	23.75	19.5	16.75

На основі цих даних, скориставшись регресійним аналізом, отримаємо аналітичну залежність критичного кута від подовження стерна (в градусах)

$$\alpha_{Rk} = 29.6824^{\circ} \cdot \Lambda_R^{-0.356}.$$
(32)

Проаналізуємо існуючі подання для гідродинамічних коефіцієнтів стерна. Як було вказано раніше, відомі два підходи до опису гідродинамічних сил на корпусі судна. В основі першого знаходиться визначення коефіцієнту підйомної сили C_{LR} , при другому підході визначають коефіцієнти нормальної сили на судновому стерні C_{NR} .

Експериментальні дослідження [2 - 3] показують, що гідродинамічні сили на стерні залежать в різній степені від форми, числа Рейнольдса, товщини стерна, подовження стерна Λ_R і кута атаки α_R потоку на стерно. При цьому вважається, що найбільш суттєво впливають останні два параметри, тому, зазвичай, існуючі подання для C_{LR} і C_{NR} містять лише α_R і Λ_R . Для докритичних кутів атаки, в основному, застосовують лінійну апроксимацію коефіцієнта підйомної сили, тобто в розвинені в ряд Маклорена по куту атаки:

$$C_{LR}(\alpha_R) = f(\alpha_R) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \cdot \alpha_R^j = f(0) + f'(0) \cdot \alpha_R + o(\alpha_R),$$
(33)

використовують тільки другий доданок. Перший доданок дорівнює нулю: $f(0) = C_{LR}(0) = 0$, в силу фізичних міркувань, отже

$$C_{LR} = C'_{LR} \cdot \alpha_R \,. \tag{34}$$

Для визначення гідродинамічної похідної $C'_{LR} = \frac{dC_{LR}}{d\alpha_R}$ застосовують формулу [2, 3]:

$$C_{LR}' = \frac{2\pi\Lambda_R}{2 + \sqrt{\Lambda_R^2 + 4}},\tag{35}$$

або удосконалену формула Прандля

$$C_{LR}' = \frac{2\pi\kappa_0 \Lambda_R}{2 + \Lambda_R},\tag{36}$$

де коефіцієнт $\kappa_0 = 0.88$ для підвісних і $\kappa_0 = 0.64$ для напівпідвісних рулів морських суден.

Для стерн малого подовження $\Lambda_R < 1$ відоме також подання [2]

$$C_{LR} = C'_{LR} \cdot \sin \alpha_R + \tilde{C}_d \sin^2 \alpha_R \cdot \cos \alpha_R, \qquad (37)$$

де $\tilde{C}_d = 2$ для звичайних стерн і $\tilde{C}_d = 1.2 \div 1.5$ для стерн із закругленими боковими проекціями.

Для коефіцієнту опору стерна C_{DR} може бути використана наступна формула [3]

$$C_{DR} = C_{D0} + K_D \cdot \sin^2 \alpha_R + \tilde{C}_d \cdot \sin^3 \alpha_R, \qquad (38)$$

де $C_{D0} = (0.0221 - 0.0023 \lg \text{Re})\tilde{C}$. Коефіцієнти $\tilde{C} = \tilde{C}(\tilde{t}_R)$ і $K_D(\Lambda_R)$ визначаються за допомогою графіків [3]. Відмітим, що при $\alpha_R = 0$, зазвичай, значення лобового опору вибирається наближено: $C_{D0} \approx 0.014$.

Відомі також інші представлення [29] для коефіцієнтів підйомної сили і опору стерна, які також отримані на основі обробки експериментальних даних:

$$C_{LR} = 2\pi \frac{\Lambda_R(\Lambda_R + 0.7)}{(\Lambda_R + 1.7)^2} \cdot \sin \alpha_R + C_Q \sin \alpha_R \cdot |\sin \alpha_R| \cdot \cos \alpha_R.$$
(39)

$$C_{DR} = \frac{C_{LD}^2}{\pi \cdot \Lambda_R} + C_Q \cdot |\sin \alpha_R|^3 + C_{D0}, \quad C_{D0} = 2.5 \frac{0.075}{(\lg \text{Re} - 2)^2}.$$
 (40)

Значення сталої C_O автори моделі рекомендують брати рівним одиниці: $C_O = 1$.

Згідно другого підходу [7, 8], для визначення гідродинамічного коефіцієнту нормальної сили, використовується наступне розвинення

$$C_{NR} = C'_{NR} \cdot \sin \alpha_R. \tag{41}$$

Для обчислення гідродинамічної похідної нормальної сили C'_{NR} використовують формулу

$$C'_{NR} = \frac{6.13\Lambda_R}{\Lambda_R + 2.25} \,. \tag{42}$$

Слід відмітити, що при цьому значенням тангенціальної сили на стерні нехтують: $C_{SR} = 0$.

За допомогою методів прямого числового моделювання на основі диференціальних рівнянь Рейнольдса і Нав'є-Стокса отримані [30] наступні подання гідродинамічних коефіцієнтів

$$C_{LR} = \frac{\Lambda_R}{\Lambda_R + 2.25} \cdot s_L \sin \alpha_R \,, \tag{43}$$

$$C_{DR} = \frac{\Lambda_R}{\Lambda_R + 2.25} \cdot (s_D \sin \alpha_R + 0.01), \qquad (44)$$

$$C_{NR} = \frac{\Lambda_R}{\Lambda_R + 2.25} \cdot s_N \sin \alpha_R.$$
(45)

Сталі у формулах (43)-(45) наведені в таблиці 4 для профіля стерна NACA.

На рисунку 3 наведені залежності від кута атаки на стерно α_R коефіцієнта підйомної сили C_{LR} , які отримані за допомогою подання (43), (неперервні лінії), за допомогою формули (39), (точкові лінії), і за допомогою формули (37) (штрихована лінія) для стерна NACA-0020. При цьому чорні, червоні, сині, зелені, жовті лінії отримані відповідно при значеннях подовження стерна Λ_R : 0.5; 1; 1.5; 2; 2.5.

Таблиця 4. Значення сталих для гідродинамічних коефіцієнтів

Профіль стерна	s_L	s_D	s_N
NACA-0012	6.24	0.3	6.1672
NACA-0015	6.18	0.3	6.1158
NACA-0018	6.01	0.3	5.9664
NACA-0020	5.85	0.4	5.78
NACA-0021	5.72	0.4	5.6744
NACA-0024	5.412	0,3	5.3401
NACA-0025	5.26	0.3	5.20



Дослідження відомих подань для гідродинамічних коефіцієнтів на стерні, показали суттєві недоліки існуючих моделей. Зокрема, подання (37), (38) і (45) можна розглядати тільки

при не від'ємних значеннях кута атаки α_R на стерно, оскільки там порушена непарність для підйомної сили і парність для сили опору стерна. В поданнях (39) і (40) присутні не диференційовані функції, на кшталт $|\sin \alpha_R|$. Тому для загального опису поведінки гідродинамічних коефіцієнтів вони можуть бути використанні, але як праві частини диференціальних рівнянь динаміки пропульсивного комплексу їх використання не коректне, оскільки в цьому випадку фазові координати руху судна будуть розривними функціями. Що стосується подань (34), (41), (43) – (45), то вони можуть бути використані тільки для докритичних значеннях кута атаки в достатньо вузькій області зміни місцевого кута дрейфу і кута перекладки стерна. При цьому більш точними можна вважати подання (43) і (45), які враховують відносну товщину стерна \tilde{t}_R . Це підтверджують результати, наведенні на рисунку 3 для C_{LR} . Всі існуючі моделі не враховують зрив потоку на стерні при досягненні критичних кутів атаки.

Для усунення вказаних недоліків існуючих математичних моделей гідродинамічних коефіцієнтів сил на стерні, будемо розшукувати коефіцієнт підйомної сили так

$$C_{LR} = C'_{LR} \cdot \sin \alpha_R - \chi(\Lambda_R) \cdot \sin^3 \alpha_R, \qquad (46)$$

де $\chi(\Lambda_R)$ поки що не відома функція подовження стерна Λ_R , яку визначимо, спираючись на наступні міркування. Подання (46) при критичних значеннях кута атаки повинно досягати максимуму, отже повинна виконуватись умова

$$\frac{dC_{LR}}{d\alpha_R}\Big|_{\alpha_R = \alpha_{kR}} \equiv C'_{LR} \cdot \cos \alpha_{kR} - 3\chi(\Lambda_R) \cdot \sin^2 \alpha_{kR} \cdot \cos \alpha_{kR} = 0,$$
(47)

Звідси визначимо критичний кут атаки

$$\alpha_{kR} = \arcsin \sqrt{\frac{C'_{LR}}{6\chi(\Lambda_R)}}.$$
(48)

Прирівнявши подання (32) і (48), знайдемо вираз для невідомої функції

$$\chi(\Lambda_R) = \frac{C'_{LR}}{3\sin^2(29.6824 \cdot \Lambda_R^{-0.356})}.$$
(49)

Після підстановки (37) у (34), отримаємо

$$C_{LR} = C'_{LR} \cdot \left(\sin \alpha_R - \frac{\sin^3 \alpha_R}{3\sin^2 (29.6824 \cdot \Lambda_R^{-0.356})} \right).$$
(50)

Для гідродинамічної похідної C'_{LR} узагальним розвинення (35), (36) та (43). Для цього скориставшись таблицею 4, за допомогою регресійного аналізу, отримаємо наступне представлення, яке залежать як від подовження Λ_R , так і від відносної товщини стерна \tilde{t}_R :

$$C_{LR}' = \frac{\Lambda_R \cdot \eta_L(\tilde{t}_R)}{2.25 + \Lambda_R}, \quad \eta_L(\tilde{t}_R) = -50.503 \cdot (\tilde{t}_R)^2 + 11.123 \cdot \tilde{t}_R + 5.638.$$
(51)

$$C'_{NR} = \frac{\Lambda_R \cdot \eta_N(\tilde{t}_R)}{2.25 + \Lambda_R}, \quad \eta_N(\tilde{t}_R) = -54.123 \cdot (\tilde{t}_R)^2 + 12.512 \cdot \tilde{t}_R + 5.451.$$
(52)

Для обчислення гідродинамічного коефіцієнту сили опору на стерні пропонується використовувати наступне розвинення по куту атаки

$$C_{DR} = C_{D0} + K_D \cdot \sin^2 \alpha_R + \tilde{C}_d \cdot \sin^4 \alpha_R, \qquad (53)$$

де $C_{D0} = (0.0221 - 0.0023 \lg \text{Re})\tilde{C}$; для коефіцієнтів $\tilde{C} = \tilde{C}(\tilde{t}_R)$ і $K_D(\Lambda_R)$, методами регресії на основі експериментальних даних [2, 3], отримані наступні формули

$$\tilde{C} = 1.36 - 4.09\tilde{t}_R + 29.36\tilde{t}_R^2,$$
(54)

$$K_D = 0.856\Lambda_R - 0.188\Lambda_R^2.$$
(55)

Проведемо числовий аналіз отриманих математичних моделей. На рисунках 4 і 5 наведені залежності гідродинамічних похідних C'_{LR} , C'_{NR} відповідно від подовження Λ_R , при сталих значеннях відносної товщин, і від відносної товщини \tilde{t}_R , при сталих значеннях подовження стерна. На обох рисунках суцільними лініями відображенні значення похідної C'_{LR} , точковими лініями значення похідної C'_{NR} .



 \tilde{t}_R

Рис. 6. Залежності C_{LR} від кута атаки α_R

На рис. 4 чорні, червоні, сині, зелені та жовті лінії отримані відповідно при значеннях \tilde{t}_R : 0.12; 0.15; 0.18; 0.21; 0.25. На рис. 5 чорна, червона, синя, зелена і жовта лінії отримані при значеннях Λ_R відповідно 0.5; 1.0; 1.5; 2.0; 2.5. Отримані числові результати підтверджують адекватність отриманих математичних моделей (51) і (52), і їх узгодженість із відомими результатами [30]. Зокрема, підтверджено, що гідродинамічні похідні С'_{LR} і С'_{NR} мають не суттєві відмінності, але вони суттєво залежать від відносної товщини \tilde{t}_R стерна, яку потрібно

На рисунку 6 наведені залежності від кута атаки на стерно а_к для коефіцієнта підйомної сили C_{LR}, які отримані за допомогою запропонованої математичної моделі (50), (неперервні лінії), і за допомогою математичної моделі (43), (точкові лінії) для стерна NACA-0020. При цьому чорні, червоні, сині, зелені, жовті лінії отримані відповідно при значеннях подовження стерна Λ_R : 0.5; 1; 1.5; 2; 2.5. На рисунку 7 показана загальна картина поведінки коефіцієнта підйомної сили C_{LR} в залежності від зміни кута атаки α_R на стерно і відносного подовження Λ_R , поверхня 1 відповідає запропонованій математичній моделі (50), поверхня 2 моделі (43). Наведені залежності показують, що при малих значеннях кута атаки потоку на стерно: $|\alpha_{R}| \le 15^{\circ}$, обидві моделі добре узгоджуються, але при кутах $|\alpha_{R}| > 15^{\circ}$, спостерігаються суттєві відмінності. Згідно моделі (43) коефіцієнт підйомної сили продовжує зростати із зростанням кута атаки на стерно, що не відповідає відомим [2, 3, 30] результатам експериментальних досліджень. Згідно запропонованій моделі (50), коефіцієнт С_{LR} для усіх стерн досягає критичного значення після якого починається зрив потоку на стерні і зменшення підйомної сили стерна. Причому чим більше подовження стерна тим менше значення критичного кута атаки α_{Rk} . Ці результати повністю узгоджуються із результатами відомих експериментальних досліджень.



На рисунку 8 за допомогою запропонованої математичної моделі (53) наведена залежність коефіцієнта сили опору стерна C_{DR} від зміни кута атаки α_R на стерно і відносного подовження Λ_R . Розрахунки, зокрема, показують, що при збільшенні кута атаки коефіцієнт C_{DR} зростає, і при $|\alpha_R| > 15^\circ$ силою опору стерна вже не можна нехтувати. Помітно також, що сила опору стерна досягає максимального значення при подовженнях $\Lambda_R \in (1.8; 2.2)$. Отримані результати добре узгоджуються із експериментальними дослідженнями сили опору стерна.

34-2023



На рисунках 9, 10 наведенні залежності гідродинамічних коефіцієнтів відповідно для компонент P_X *і* P_Y результуючої сили для стерна NACA-0020 для максимально можливого діапазону зміни місцевого дрейфу β_R і кута перекладки стерна δ . При цьому на обох рисунках поверхня 1 (синьо - сірий колір) відповідає подовженню стерна $\Lambda_R = 0.5$, поверхня 2 (помаранчевий колір) подовженню стерна $\Lambda_R = 1.5$, поверхня 3 (фіолетовий колір) відповідає подовженню $\Lambda_R = 2.5$.

Результати обчислень показують адекватність отриманих математичних моделей гідродинамічних коефіцієнтів результуючої сили на стерні для максимально можливої області зміни місцевого кута дрейфу і кута перекладки стерна.

Висновки і перспектива подальшої роботи по даному напрямку

Отримані нові адекватні і прості в застосуванні математичні моделі для гідродинамічних сил і моменту на стерні, які, на відміну від існуючих математичних моделей, враховують наявність критичних кутів атаки потоку на стерно, товщину стерна і можуть бути застосовані для максимально можливої області зміни кута дрейфу і кута перекладки стерна.

Результати числового моделювання дозволяють оцінити вплив кута дрейфу β_R і кута перекладки стерна δ на поведінку коефіцієнтів C_{YR}^* і C_{XR}^* . Зокрема, підйомна сила стерна і сила опору приймають більші значення, якщо місцевій кут дрейфу і кут перекладки стерна мають різні знаки ніж при однакових знаках цих кутів. Це узгоджується із тим фактом, що поворот судна в напрямку дрейфу судна виконати легше ніж в протилежному напрямку і підтверджує адекватність отриманих нових математичних моделей. Крім того, компонента P_X результуючої сили \vec{P}_{R_*} на стерні, при кутах дрейфу більших від кута перекладки стерна, буде мати від'ємний знак, тобто сила \vec{P}_{X_*} діяти в напрямку руху судна. Помітна також залежність обох сил від подовження стерна. Зокрема, повздовжня компонента, навпаки, спадає.

Отримані результати дозволять будувати загальні адекватні математичні моделі пропульсивного комплексу судна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Першиц Р. Я., Управляемость и управление судном. Л.: Судостроение, 1983.

- 2. Соболев Г.В., Управляемость корабля и автоматизация судовождения. Л.: Судостроение, 1976.
- 3. Гофман А. Д., *Движительно-рулевой комплекс и маневрирование судна. Справочник*, Л.: Судостроение, 1988.
- 4. Миюсов М.В., *Режимы работы и автоматизация пропульсивного комплекса теплохода с ветродвижителями*. Одесса: ОГМА, ОКФА, 1996.
- 5. Кривий О. Ф., *Методи математичного моделювання в задачах судноводіння*. ОНМА, Одеса, 2015.
- 6. Кривой А. Ф., Миюсов М. В., "Математическая модель плоского движения судна при наличии ветродвижителей," *Судоводіння*, вип. 26, с.110-119, 2016.
- 7. Inoe S., Hirano M., Kijima K, "Hydrodynamic derivatives on ship maneuvering," *Int. Shipbuilding Progress*, v. 28, № 321, pp. 67-80, 1981.
- 8. Kijima K., "Prediction method for ship maneuvering performance in deep and shallow waters. Presented at the Workshop on Modular Maneuvering Models," *The Society of Naval Architects and Marine Engineering*, v.47, pp.121-130, 1991.
- 9. Yasukawa H., Yoshimura Y., "Introduction of MMG standard method for ship manoeuvring predictions," *J Mar Sci Technol*, v. 20, doi:10.1007/s00773-014-0293-y, pp.37–52, 2015.
- 10. Yoshimura Y., Masumoto Y., "Hydrodynamic Database and Manoeuvring Prediction Method with Medium High-Speed Merchant Ships and Fishing," *International Conference on Marine Simulation and Ship Maneuverability (MARSIM 2012)*, pp.494-504, 2012.
- 11. Yoshimura Y., Kondo M., "Tomofumi Nakano, et al. Equivalent Simple Mathematical Model for the Manoeuvrability of Twin-propeller Ships under the same propeller-rps," *Journal of the Japan Society of Naval Architects and Ocean Engineers*, v.24, №.0, https://doi.org/10.9749/jin.133.28, p.157, 2016.
- 12. Zhang Wei, Zou Zao-Jian. "Time domain simulations of the wave-induced motions of ships in maneuvering condition," *J Mar Sci Technol*, v. 21, doi: 10.1007/s00773-015-0340-3, pp. 154–166, 2016.
- Zhang Wei, Zou Zao-Jian, Deng De-Heng, "A study on prediction of ship maneuvering in regular waves," *Ocean Engineering*, v. 137, doi: http://dx.doi.org/10.1016/ j.oceaneng.2017.03.046, pp. 367-381, 2017.
- 14. Erhan Aksu, Erkan Köse, "Evaluation of Mathematical Models for Tankers' Maneuvering Motions," *JEMS Maritime Sci*, v.5 №1, doi: 10.5505/jems.2017.52523, pp. 95-109, 2017.
- 15. Kang D., Nagarajan V., Hasegawa K., et al, "Mathematical model of single-propeller twinrudder ship," *J Mar Sci Technol*, v. 13, doi: https://doi.org/10.1007/s00773-008-0027-0, pp.207–222, 2008.
- 16. Shang H., Zhan C., Z. Liu Z., "Numerical Simulation of Ship Maneuvers through Self-Propulsion", *Journal of Marine Science and Engineering*, 9(9):1017, doi: https://doi.org/10.3390/jmse9091017, 2021.
- 17. Shengke Ni., Zhengjiang Liu, and Yao Cai., "Ship Manoeuvrability-Based Simulation for Ship Navigation in Collision Situations," *J. Mar. Sci. Eng*, doi:10.3390/jmse7040090, 2019.
- Sutulo S. & C. Soares G., "Mathematical Models for Simulation of Maneuvering Performance of Ships," *Marine Technology and Engineering, (Taylor & Francis Group, London)*, p 661– 698, 2011.

- 19. Kryvyi O. F, Miyusov M. V., "Mathematical model of hydrodynamic characteristics on the ship's hull for any drift angles", Advances in Marine Navigation and Safety of Sea Transportation. Taylor & Francis Group, London, UK, pp. 111-117, 2019.
- Kryvyi O. F, Miyusov M. V., "The Creation of Polynomial Models of Hydrodynamic Forces on the Hull of the Ship with the help of Multi-factor Regression Analysis," 8 International Maritime Science Conference. IMSC 2019. Budva, Montenegro, pp.545-555. [Online]. Available: http://www.imsc2019. ucg.ac.me/IMSC2019_ BofP. pdf.
- 21. Kryvyi O. F., Miyusov M.V., "Construction and Analysis of Mathematical Models of Hydrodynamic Forces and Moment on the Ship's Hull Using Multivariate Regression Analysis," *TransNav, the International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*, Vol. 15, No. 4, doi:10.12716/1001.15.04.18, pp. 853-864, 2021.
- 22. Кривой А. Ф., Миюсов М. В., "Математические модели гидродинамических характеристик пропульсивного комплекса судна для произвольных углов дрейфа," *Судоводіння*, вип. 28, doi: 10.31653/2306-5761.27.2018.88-102, с. 88-103, 2018.
- 23. Кривий О. Ф., Міюсов М. В., "Нові математичні моделі повздовжніх гідродинамічних сил на корпусі судна," *Судноводіння*, вип. 30, doi: 10.31653/2306-5761.30.2020.88-98, с. 88-98, 2020.
- 24. Кривий О. Ф., Міюсов М. В., Кривий М. О., "Математичне моделювання роботи суднових гвинтів при різних режимах маневрування, " *Судноводіння*, вип. 32. с. 71-87, DOI: 10.31653/2306-5761.32.2021.71-87, 2021.
- 25. Molland A.F., Turnock S.R., *Wind tunnel investigation of the influence of propeller loading on ship rudder performance. Technical report.* University of Southampton, Southampton, UK, 1991.
- 26. Molland A.F., Turnock S.R., Further wind tunnel investigation of the influence of propeller loading on ship rudder performance. Technical report. University of Southampton, Southampton, UK, 1992.
- 27. Molland A.F., Turnock S.R., *Marine rudders and control surfaces: principles, data, design and applications.* 1st edn. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2007.
- 28. Ladson C.L., Effects of Independent Variation of Mach and Reynolds Numbers on the Low-Speed Aerodynamic Characteristics of the NACA 0012 Airfoil Section. Technical report. Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA, 1988.
- 29. Bertram V., *Practical Ship Hydrodynamic*. Elsevier Butterworth-Heinemann: Oxford, UK, 2nd ed., 2012.
- 30. Liu J., "Hydrodynamic Characteristics of Ship Rudders," in *Mathematical Modeling of Inland Vessel Maneuverability Considering Rudder Hydrodynamics*, Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-030-47475-1_4, 2020.
- 31. Shin Y-J, Kim M-C, Kang J-G, Kim J-W, "Performance Improvement in a Wavy Twisted Rudder by Alignment of the Wave Peak," *Applied Sciences*, 11(20):9634, https://doi.org/10.3390/app11209634, 2021.
- 32. Veritas D.N., "Hull equipment and appendages: stern frames, rudders and steering gears," in *Rules for Classification of Steel Ships*, part 3, chapter 3, section 2, pp 6–28, 2000.
- 33. Aoki I., Kijima K., Furukawa Y., Nakiri Y., "On the prediction method for maneuverability of a full scale ship," *Journal of the Japan Soc of Nav. Archic. and Ocean Eng.*, 2006, 3, 157-165.
- Lee H. Y., Shin S. S., Yum D. J., "Improvement of Prediction Technique of the Ship's Maneuverability at Initial Design Stage," *J Soc Naval Archit Korea*, 35, pp. 46-53, 1998. [in Japanese].

35. Lee, H.Y., Shin, S.S., "The prediction of ship's manoeuvring performance in initial design stage," *Practical Design of Ships and Mobile Units*, pp. 633–639, 1998.

REFERENCES

- 1. Pershytz R. Y., Dynamic control and handling of the ship. L: Sudostroenie, 1983. [in Russian].
- 2. Sobolev G.V., *Dynamic control of ship and automation of navigation*. L.: Sudostroenie, 1976. [in Russian].
- 3. Gofman A. D., *Propulsion and steering complex and ship maneuvering*. Handbook. L.: Sudostroyenie, 1988. [in Russian].
- 4. Miyusov M. V., *Modes of operation and automation of motor vessel propulsion unit with wind propulsors*. Odessa, 1996. [in Russian].
- 5. Kryvyi O. F., *Methods of mathematical modeling in navigation*. ONMA, Odessa, 2015. [in Ukrainian].
- 6. Kryvyi A. F., Miyusov M. V., "Mathematical model of the plane motion of the ship in the presence of wind turbines," *Sudnovodinnya*, vol. 26, pp.110-119, 2016. [in Russian].
- 7. Inoe S., Hirano M., Kijima K, "Hydrodynamic derivatives on ship maneuvering," *Int. Shipbuilding Progress*, v. 28, № 321, pp. 67-80, 1981.
- 8. Kijima K., "Prediction method for ship maneuvering performance in deep and shallow waters. Presented at the Workshop on Modular Maneuvering Models," *The Society of Naval Architects and Marine Engineering*, v.47, pp.121-130, 1991.
- 9. Yasukawa H., Yoshimura Y., "Introduction of MMG standard method for ship manoeuvring predictions," *J Mar Sci Technol*, v. 20, doi:10.1007/s00773-014-0293-y, pp.37–52, 2015.
- 10. Yoshimura Y., Masumoto Y., "Hydrodynamic Database and Manoeuvring Prediction Method with Medium High-Speed Merchant Ships and Fishing," *International Conference on Marine Simulation and Ship Maneuverability (MARSIM 2012)*, pp.494-504, 2012.
- 11. Yoshimura Y., Kondo M., "Tomofumi Nakano, et al. Equivalent Simple Mathematical Model for the Manoeuvrability of Twin-propeller Ships under the same propeller-rps," *Journal of the Japan Society of Naval Architects and Ocean Engineers*, v.24, №.0, https://doi.org/10.9749/jin.133.28, p.157, 2016.
- 12. Zhang Wei, Zou Zao-Jian. "Time domain simulations of the wave-induced motions of ships in maneuvering condition," *J Mar Sci Technol*, v. 21, doi: 10.1007/s00773-015-0340-3, pp. 154–166, 2016.
- Zhang Wei, Zou Zao-Jian, Deng De-Heng, "A study on prediction of ship maneuvering in regular waves," *Ocean Engineering*, v. 137, doi: http://dx.doi.org/10.1016/ j.oceaneng.2017.03.046, pp. 367-381, 2017.
- 14. Erhan Aksu, Erkan Köse, "Evaluation of Mathematical Models for Tankers' Maneuvering Motions," *JEMS Maritime Sci*, v.5 №1, doi: 10.5505/jems.2017.52523, pp. 95-109, 2017.
- 15. Kang D., Nagarajan V., Hasegawa K., et al, "Mathematical model of single-propeller twinrudder ship," *J Mar Sci Technol*, v. 13, doi: https://doi.org/10.1007/s00773-008-0027-0, pp.207–222, 2008.
- 16. Shang H., Zhan C., Z. Liu Z., "Numerical Simulation of Ship Maneuvers through Self-Propulsion", *Journal of Marine Science and Engineering*, 9(9):1017, doi: https://doi.org/10.3390/jmse9091017, 2021.
- 17. Shengke Ni., Zhengjiang Liu, and Yao Cai., "Ship Manoeuvrability-Based Simulation for Ship Navigation in Collision Situations," *J. Mar. Sci. Eng*, doi:10.3390/jmse7040090, 2019.

- 18. Sutulo S. & C. Soares G., "Mathematical Models for Simulation of Maneuvering Performance of Ships," *Marine Technology and Engineering, (Taylor & Francis Group, London)*, p 661–698, 2011.
- 19. Kryvyi O. F, Miyusov M. V., "Mathematical model of hydrodynamic characteristics on the ship's hull for any drift angles", *Advances in Marine Navigation and Safety of Sea Transportation. Taylor & Francis Group, London, UK*, pp. 111-117, 2019.
- Kryvyi O. F, Miyusov M. V., "The Creation of Polynomial Models of Hydrodynamic Forces on the Hull of the Ship with the help of Multi-factor Regression Analysis," 8 International Maritime Science Conference. IMSC 2019. Budva, Montenegro, pp.545-555. [Online]. Available: http://www.imsc2019. ucg.ac.me/IMSC2019_ BofP. pdf.
- 21. Kryvyi O. F., Miyusov M.V., "Construction and Analysis of Mathematical Models of Hydrodynamic Forces and Moment on the Ship's Hull Using Multivariate Regression Analysis," *TransNav, the International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*, Vol. 15, No. 4, doi:10.12716/1001.15.04.18, pp. 853-864, 2021.
- 22. Kryvyi O. F, Miyusov M. V., "Mathematical models of hydrodynamic characteristics of the ship's propulsion complex for any drift angles," *Shipping & Navigation*, v. 28, doi: 10.31653/2306-5761.27.2018.88-102, pp. 88-102, 2018.
- 23. Kryvyi O. F, Miyusov M. V., "New mathematical models of longitudinal hydrodynamic forces on the ship's hull," *Shipping & Navigation*, v. 30, doi: 10.31653/2306-5761. 30. 2020.88-98, pp. 88-89, 2020.
- 24. Kryvyi O. F, Miyusov M. V., Kryvyi M. O., "Mathematical modelling of the operation of ship's propellers with different maneuvering modes," *Shipping & Navigation*, v. 32, doi: 10.31653/2306-5761.32.2021.71-88, pp. 71-88, 2021.
- 25. Molland A.F., Turnock S.R., *Wind tunnel investigation of the influence of propeller loading on ship rudder performance. Technical report.* University of Southampton, Southampton, UK, 1991.
- 26. Molland A.F., Turnock S.R., Further wind tunnel investigation of the influence of propeller loading on ship rudder performance. Technical report. University of Southampton, Southampton, UK, 1992.
- 27. Molland A.F., Turnock S.R., *Marine rudders and control surfaces: principles, data, design and applications.* 1st edn. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2007.
- 28. Ladson C.L., Effects of Independent Variation of Mach and Reynolds Numbers on the Low-Speed Aerodynamic Characteristics of the NACA 0012 Airfoil Section. Technical report. Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA, 1988.
- 29. Bertram V., *Practical Ship Hydrodynamic*. Elsevier Butterworth-Heinemann: Oxford, UK, 2nd ed., 2012.
- 30. Liu J., "Hydrodynamic Characteristics of Ship Rudders," in *Mathematical Modeling of Inland Vessel Maneuverability Considering Rudder Hydrodynamics*, Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-030-47475-1_4, 2020.
- 31. Shin Y-J, Kim M-C, Kang J-G, Kim J-W, "Performance Improvement in a Wavy Twisted Rudder by Alignment of the Wave Peak," *Applied Sciences*, 11(20):9634, https://doi.org/10.3390/app11209634, 2021.
- 32. Veritas D.N., "Hull equipment and appendages: stern frames, rudders and steering gears," in *Rules for Classification of Steel Ships*, part 3, chapter 3, section 2, pp 6–28, 2000.
- 33. Aoki I., Kijima K., Furukawa Y., Nakiri Y., "On the prediction method for maneuverability of a full scale ship," *Journal of the Japan Soc of Nav. Archic. and Ocean Eng.*, 2006, 3, 157-165.

- 34. Lee H. Y., Shin S. S., Yum D. J., "Improvement of Prediction Technique of the Ship's Maneuverability at Initial Design Stage," *J Soc Naval Archit Korea*, 35, pp. 46-53, 1998. [in Japanese].
- 35. Lee, H.Y., Shin, S.S., "The prediction of ship's manoeuvring performance in initial design stage," *Practical Design of Ships and Mobile Units*, pp. 633–639, 1998.